

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТЕЙШЕЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ.

Колебательная система - это система, в которой в результате нарушения состояния равновесия могут возникнуть колебания.

Вид возникающих в системе колебаний зависит от различных физических величин, характеризующих систему - параметров системы, а также от вида внешних воздействий, выводящих систему из положения равновесия (например: математический маятник в поле земного тяготения).

Колебательные системы могут быть линейными и нелинейными. Физические системы, совершающие колебания, существенные черты которых передаются с достаточным приближением линейными дифференциальными уравнениями, называются линейными колебательными системами, остальные - нелинейными.

Мы рассмотрим только простейшие колебательные системы - линейные системы, обладающие одной степенью свободы, и такие, что параметры системы, не зависят от ее состояния и являются постоянными. Такие колебательные системы описываются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами. Примерами таких систем являются системы типа "электрический колебательный контур", "крутильный маятник", "шарик, подвешенный на пружине" и т.п.

Рассмотрим явления, происходящие в колебательных системах. Не имея возможности провести анализ в общем случае, ограничимся рассмотрением двух примеров: электрического колебательного контура и механического маятника.

Пусть колебательный контур (рис. 1) состоит из емкости C , индуктивности L и омического сопротивления R .

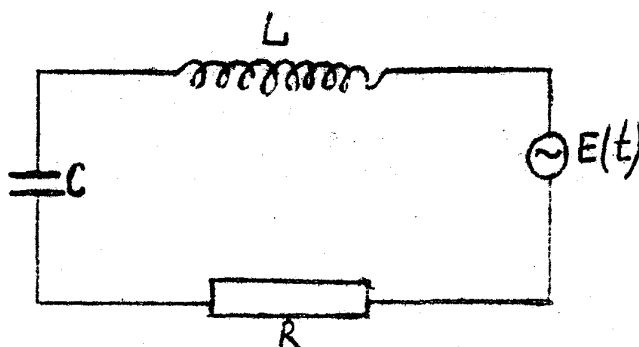


рис. 1.

Контур может быть выведен из положения равновесия с помощью источника переменного напряжения $E(t)$, включенного последовательно с элементами контура. Будем считать, что вид зависимости ЭДС источника от времени мы можем выбирать произвольно (в частности можем положить его равным нулю). ЭДС источника играет роль внешнего вынуждающего воздействия для контура.

Механический маятник (рис.2) представляет из себя шарик с массой m , скрепленный с пружиной K .

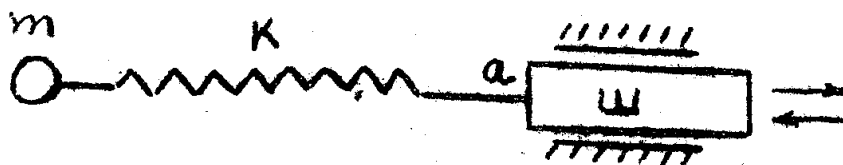


рис.2.

Система может быть приведена в движение с помощью движущегося тока I , к которому прикреплен второй конец a пружины. Составим дифференциальные уравнения для напряжения U_C на ёмкости колебательного контура и для координаты x смещения центра шарика от положения равновесия. Очевидно, что для замкнутой цепи колебательного контура имеет место равенство

$$E(t) = U_L + U_R + U_C \quad (1)$$

где U_L , U_R и U_C - падения напряжения на L , R и C -элементах контура. Используя известные равенства

$$U_R = IR,$$

$$U_L = L$$

и
$$U = U_C = \frac{1}{C} \int Idt,$$

и учитывая, что

$$U' = \frac{dU}{dt} = \frac{I}{C}, \quad U'' = \frac{d^2U}{dt^2} = \frac{1}{C} \frac{dI}{dt},$$

приводим уравнение (1) к виду

$$LCU'' + RCU' + U = E(t)$$

Введем обозначения

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2, \quad \frac{R}{L} = 2\alpha \quad (2)$$

Тогда окончательно получаем

$$U'' + 2\alpha U' + \omega_0^2 U = E(t) \omega_0^2 \quad (3)$$

Для механической системы, согласно второму закону Ньютона

$$mx'' = f_{mp} + f_g \quad (4)$$

где $f_{mp} = -rx'$ - сила трения, $f_g = -k(x - x_1)$ - сила, обусловленная деформацией пружины, k - коэффициент жесткости пружины, $x_1 = x_1(t)$ - смещение конца a пружины от положения равновесия, r - коэффициент трения, $x' = \frac{dx}{dt}$ - скорость шарика и $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$ - его ускорение.

Используя выражения для f_{mp} и f_g , приводим уравнение (4) к виду

$$mx'' + rx' + k(x - x_1) = 0$$

Вводя обозначения

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{r}{m} = 2\alpha, \quad (5)$$

окончательно получаем

$$x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x = x_1(t) \omega_0^2 \quad (6)$$

Сравнивая уравнения (2) и (6), видим, что они отличаются только обозначениями переменной (U или x) и свободного члена $E(t)$ или $x_1(t)$. Т.е. и напряжение на емкости электрического контура, и смещение шарика механического маятника описываются одним и тем же уравнением и одинаковым образом зависят от вида вынуждающего воздействия. (В дальнейшем будем пользоваться уравнением (3), помня, что оно описывает равным образом и механическую и электрическую системы).

Обобщая полученный результат, можем сказать, что любая простейшая колебательная система может быть охарактеризована только двумя величинами α и ω_0 , а характер ее движения зависит от этих величин и от вида функции $E(t)$, которая описывает внешнее воздействие на систему. Коэффициенты α и ω_0 определяются параметрами конкретной колебательной системы. В частности, для рассмотренных нами систем имеют место соотношения (2) и (5). Величина α называется коэффициентом затухания, а ω_0 - собственной частотой системы.

Возбуждая колебательную систему каким-либо способом (т.е. задавая определенный вид функций $E(t)$) и исследуя возникшие колебания, можно определить коэффициенты α и ω_0 . Существуют два наиболее употребительных способа определения коэффициентов - способ, основанный на возбуждении в системе свободных колебаний и способ, основанный не на возбуждении в системе вынужденных колебаний. Рассмотрим эти два типа колебаний системы.

Свободные у колебания.

Свободные или собственные колебания системы возникают в том случае, если система была выведена из состояния равновесия достаточно резким начальным толчком, а затем предоставлена самой себе. Положив $E(t)=0$ в уравнении (3), получим для случая свободных колебаний однородное уравнение

$$U'' + 2\alpha U' + \omega_0^2 U = 0 \quad (7)$$

легко убедиться простой подстановкой, что функция

$$U = U_0 t^{2t} \cos(\omega_c t - \varphi) \quad (8)$$

где U_0 и φ - произвольные постоянные, а

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (9)$$

удовлетворяет уравнению- (7). (В теории дифференциальных уравнений доказывается, что если $\omega_0^2 \neq \alpha^2$, это решение единственно).

Формула (8) имеет непосредственный физический смысл только в том случае, если ω_c - действительная величина, т.е. $\omega_0^2 > \alpha^2$.

(Если $\omega_0^2 < \alpha^2$, то это означает, что трение в системе настолько велико, что колебаний не возникает. Этот случай мы рассматривать не будем).

Функция U изображает затухающие колебания. График ее показан на рис. 3.

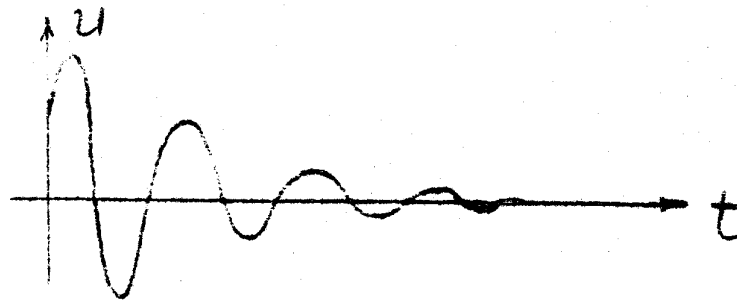


рис.3.

Эта функция - непериодическая, но она обладает известного рода "повторяемостью", заключающейся в том, что максимумы функции, ее минимумы и нули наступают через одинаковые промежутки времени, равные периоду T_c гармонического множителя $\cos(\omega_c t - \alpha)$. Поэтому можно говорить о "периоде" затухающего колебания.

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} \quad (10)$$

и о "частоте" затухающего колебания ω_c .

Точно так же, так как функция U не является гармонической, то, строго говоря, к ней неприменим термин "амплитуда".

Однако, обычно говорят об "амплитуде" затухающего колебания, понимая под этим наибольшее значение, которого достигает функция в течение одного периода. "Амплитуда" затухающего колебания $U_0 e^{\alpha t}$ убывает по показательному закону. Отношение двух последовательных "амплитуд"

$$\frac{U_0 e^{-\alpha t}}{U_0 e^{-\alpha(t+T_c)}} = e^{\alpha T_c}$$

если величина постоянная. Натуральный логарифм этого отношения

$$\lambda = \alpha T_c$$

называется логарифмическим декрементом затухания колебаний.

(Часто его называют сокращенно: декремент затухания или просто: декремент).

Поясним физический смысл величин α , λ и ω_0 .

Обозначим через τ промежуток времени, за который амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Тогда $e^{-\alpha \tau} = e^{-1}$, откуда $\alpha = \frac{1}{\tau}$. Коэффициент затухания α есть

величина обратная промежутку времени τ , в течение которого, амплитуда убывает в e раз. Логарифмический декремент затухания показывает, насколько убывает амплитуда колебания за период. Пусть N - число колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в e раз. Тогда

$$\tau = N T_c \quad \lambda = \alpha T_c = \frac{T_c}{\tau} = \frac{1}{N}$$

Логарифмический декремент затухания есть величина, обратная, числу колебаний, по

истечении которых амплитуда спадает в e раз. Если положить $\alpha=0$, то вместо (8) будем иметь $U = U_0 \cos (\omega_0 t - \varphi)$. Таким образом, собственная частота - это частота гармонических колебаний, которые совершала бы система в отсутствии трения.

Произвольные постоянные U_0 и φ в функции U определяются начальными условиями, т.е. значениями функций U и ее производной U' в начальный момент времени. Эти значения зависят от того, каким способом система была выведена из положения равновесия.

Вынужденные колебания.

Рассмотрим теперь процессы в колебательных системах в режиме вынужденных гармонических колебаний.

Пусть вынуждающее воздействие имеет вид гармонической функции

$$E(t) = E_0 \cos \omega t \quad (12)$$

Следовательно, теперь наша колебательная система описывается уравнением

$$U'' + 2 \alpha U' + \omega_0^2 U = E_0 \omega_0^2 \cos \omega t \quad (13)$$

Решение уравнения (13) имеет вид

$$U = U_0 e^{-\alpha t} \cos (\omega_c t + \varphi_c) + U(\omega) \cos [\omega t + \varphi(\omega)] \quad (14)$$

Первый член суммы в выражении (14) -это собственные колебания системы, которые возникают, когда система выводится из положения равновесия в момент включения вынуждающего воздействия. Так как собственные колебания- затухающие, то через некоторое время их амплитуда становится пренебрежимо малой, и система начинает колебаться с частотой ω , навязанной ей внешним воздействием.

Такое колебание, устанавливающееся через достаточно большое время $t / \tau \gg \frac{1}{\alpha}$, после включения вынуждающего воздействия, называется установившимся, или стационарным, а начальная стадия называется переходным процессом. Мы будем, рассматривать только установившийся процесс. Следовательно

$$U = U(\omega) \cos [\omega t + \varphi(\omega)] \quad (15)$$

т.е. колебания системы - гармонические, с амплитудой $U(\omega)$ и фазой $\varphi(\omega)$, зависящими от частоты.

В дальнейшем мы будем называть возбуждающее воздействие (12) и его амплитуду - входным колебанием (воздействием) и входной амплитудой, а колебание (15), описывающее реакцию системы, и амплитуду этого колебания - выходным колебанием и выходной амплитудой.

Подставляя (15) в уравнение (13), найдем

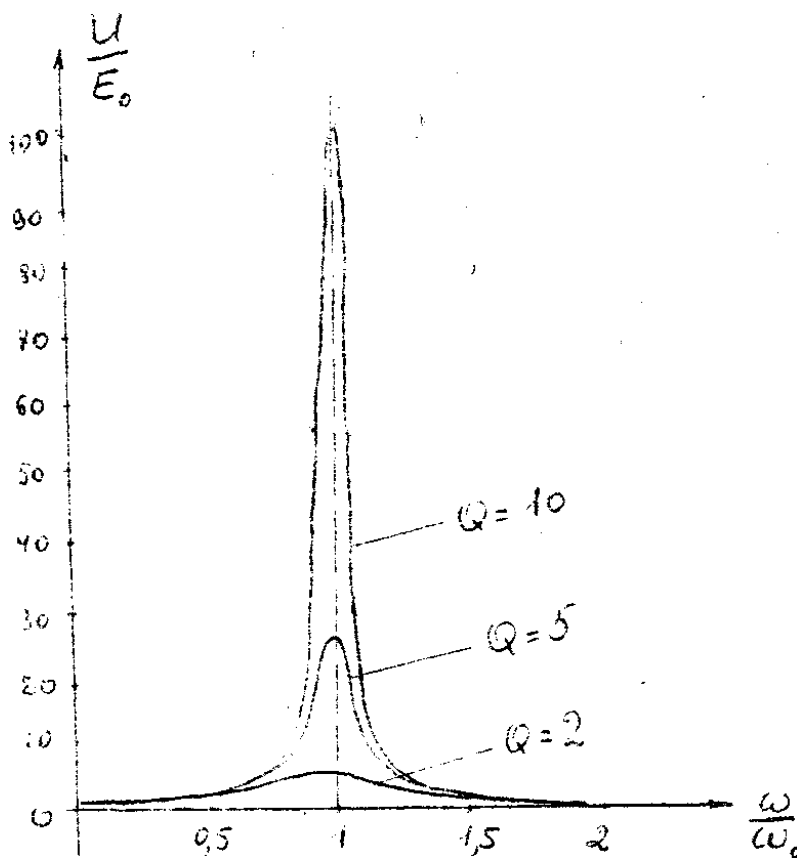
$$U(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \frac{4\alpha^2}{\omega_0^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (16)$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\alpha \omega}{\omega_0 \omega_0^2 - \omega^2} \quad (17)$$

Из полученных выражений видно, что форма зависимости выходной амплитуды от частоты и фаза выходного колебания зависят только от двух параметров - собственной частоты ω_0 и отношения $\frac{2\alpha}{\omega_0}$.

Введем понятие добротности колебательной системы Q

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} \quad (18)$$



(Физический смысл добротности выясним позднее). Подставив (18) в (16) и (17) получим

$$U(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2]^2 + \frac{1}{Q^2} (\frac{\omega}{\omega_0})^2}} \quad (19)$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{Q[1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2]} \quad (20)$$

Рис.4.

Рассмотрим характер зависимости амплитуды и фазы выходного колебания от частоты.

Семейство кривых $U(\omega)$ для различных значений Q показано на рис.4.

Если частота входного колебания мала $\omega \ll \omega_0$, то $U(\omega) \cong E_0$, т.е. амплитуда вынужденных колебаний оказывается равной величине статического смещения, которое вызвало бы постоянное внешнее воздействие E_0 . Когда частота ω приближается к частоте системы ω_0 , $U(\omega)$ возрастает и достигает максимума при частоте ω_p , несколько меньшей, чем ω_0 . При дальнейшем увеличении частоты $U(\omega)$ уменьшается и стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. Возрастание $U(\omega)$ вблизи максимума происходит тем более резко, чем больше

добротность, и, следовательно, чем меньше коэффициент затухания α системы. Резкое возрастание амплитуды выходного колебания вблизи ω_0 для систем с малым затуханием называется явлением резонанса. Кривые зависимости амплитуды от частоты в этом случае называются амплитудными резонансными кривыми, а соответствующая максимуму амплитуды – резонансной частотой.

Определим ω_p . Беря производную $\frac{dU}{d\omega}$ и приравняв ее нулю, получим

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} \quad (21)$$

Выясним физический смысл добротности. Рассмотрим систему с малым затуханием.

Такая система обладает резко выраженными резонансными свойствами. Для нее выполняются условия

$$\alpha^2 \ll \omega_0^2, \quad Q^2 \gg 1 \quad (22)$$

Тогда можно считать

$$\omega_p \approx \omega_0 \quad (23)$$

Количественной характеристикой эффекта резонанса может служить отношение выходной амплитуды в максимуму к амплитуде вынужденных колебаний вдали от резонанса, в области настолько низких частот, что амплитуду можно считать независимой от частоты. Из (19), принимая во внимание условия (22) и (23), получим

$$\frac{U_{\max}}{U(0)} \approx Q$$

т.е. это отношение равно добротности системы. Так как $U(0) = E_0$, то добротность показывает также во сколько раз амплитуда на выходе системы при резонансе превышает входную амплитуду. Чем выше добротность системы, тем уже резонансный максимум. Ширина резонансной кривой на некоторой, раз и навсегда выбранной высоте также может служить количественной характеристикой эффекта резонанса. Ширину резонансной кривой принято измерять на высоте $U = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$ (так как энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды, то это соответствует уменьшению энергии колебаний вдвое по сравнению с максимальной).

Так измеренная ширина $2\Delta\omega$ называется шириной резонансной кривой по половине мощности. Найдем ширину $2\Delta\omega$. Условие уменьшения квадрата амплитуды вдвое по сравнению с максимальной будет иметь вид

$$\frac{Q^2 E_0^2}{[U(\omega)]^2} = Q^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = 2$$

Решая это квадратное уравнение относительно $\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2$, находим

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \pm \frac{1}{Q} \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$$

или, приближенно, отбрасывая малые величины порядка $\frac{1}{Q^2}$ по сравнению с единицей

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \approx 1 \pm \frac{1}{Q}, \quad \frac{\omega}{\omega_0} \approx 1 \pm \frac{1}{2Q}, \quad \omega = \omega_0 \pm \frac{\omega_0}{2Q} = \omega_0 \pm \alpha$$

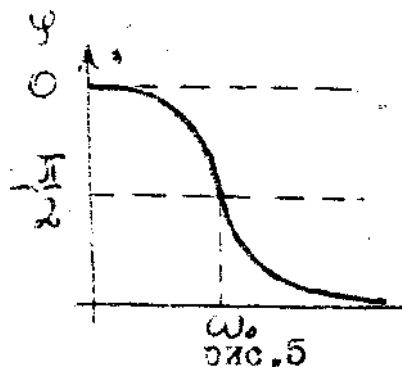
Окончательно получаем

$$2\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = 2\alpha \quad (24)$$

Таким образом, добротность характеризует резонансные свойства системы.

Величина, обратная добротности $d = \frac{1}{Q} = \frac{2\alpha}{\omega_0}$ называется затуханием

колебательной системы. Затухание также может служить характеристикой колебательной системы. Рассмотрим зависимость $\varphi(\omega)$ (рис.5).



Во первых, φ - отрицательно. Это означает, что фаза колебаний на выходе отстает от фазы вынуждающих колебаний. Этот вполне естественный результат свидетельствует о том, что реакция системы всегда проявляется позже, но ни в коем случае не раньше, чем на систему подано вынуждающее воздействие. При $\omega \ll \omega_0$ φ мало, это означает, что входное и выходное колебания практически осуществляются в фазе. С увеличением ω фазовый сдвиг увеличивается по абсолютной величине и при $\omega = \omega_0$ становится равным $-\frac{\pi}{2}$, а при $\omega \gg \omega_0$ $\varphi = -\pi$ - вынуждающее воздействие и выходное колебание в противофазе.

Экспериментальное определение коэффициентов φ и ω_0 .

1. Наблюдение свободных колебаний системы.

Вынуждают в системе свободные- колебания, измеряя промежутки времени между последующими колебаниями, определяют период затухающих колебаний T_c .

Измеряют отношение амплитуд затухающего колебания $\frac{U_n}{U_{m+n}}$ и вычисляют логарифмически декремент затухания λ по формуле

$$\lambda = \frac{1}{m} \ln \frac{U_n}{U_{m+n}}$$

где n и $n+m$ - номера колебаний. Используя формулы (9), (10), (11) вычисляют α и ω_0 .

2. Наблюдение вынужденных колебаний.

Используя особенности зависимостей $U(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, можно предложить несколько способов определения ω_0 и α .

а). Меняют частоту входного колебания и наблюдают изменение амплитуды и фазы выходного колебания. Фиксируют частоту $\omega = \omega_p$ соответствующую максимуму амплитуды, и $\omega = \omega_0$ соответствующую $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. По известным значениям ω_p и ω_0 определяют α .

б). Если затухание мало, то удобнее пользоваться приближенным методом: изменяя частоту входного колебания ω , наблюдают зависимость $U(\omega)$. Определяют частоту ω_p , соответствующую максимуму U и измеряют ширину резонансной кривой $2\Delta\omega$.

По формулам (23) и (24) определяют ω_0 и α .

Выводы.

1. Все простейшие колебательные системы, несмотря на их внутреннее различие, характеризуются двумя величинами – коэффициентом затухания α и собственной частотой ω_0 .

2. Коэффициенты α и ω_0 определяются параметрами конкретной колебательной системы.

3. Наряду с α и ω_0 на практике часто используются другие характеристики колебательных систем:

- частота затухающих колебаний $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

- резонансная частота $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$

- логарифмический декремент затухания $\lambda = \alpha T_c = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$

- добротность $Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{U(\omega_0)}{U(0)}$

- затухание $d = \frac{1}{Q} = \frac{2\alpha}{\omega_0}$

Все эти величины могут наряду с коэффициентами α и ω_0 служить характеристиками колебательной системы.

4. Если затухание мало, т.е. $\alpha^2 \ll \omega_0^2$, различие между ω_0 , ω_c и ω_p становится пренебрежимо малым:

$$\omega_0 \approx \omega_c \approx \omega_p,$$

и выполняются следующие приближенные соотношения

$$Q \approx \frac{\pi}{\lambda}$$

$$2\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = 2\alpha$$

где $2\Delta\omega$ - ширина резонансной кривой по половине мощности.

5. Величины α и ω_0 , характеризующие колебательную систему можно определить экспериментально, наблюдая колебания системы, возбуждаемой каким-либо определенным образом.

Цель работы и описание экспериментальной установки.

Цель настоящей работы - исследовать и сопоставить свойства и характеристики электрического колебательного контура и электро-механической колебательной системы.

Установка, на которой проводится эксперимент, состоит из:

- а) панели, где смонтированы механическая колебательная система и электрический колебательный контур,
- б) генератора синусоидальных сигналов,
- в) генератора импульсного напряжения,
- г) электронного осциллографа и
- д) двух магазинов сопротивлений

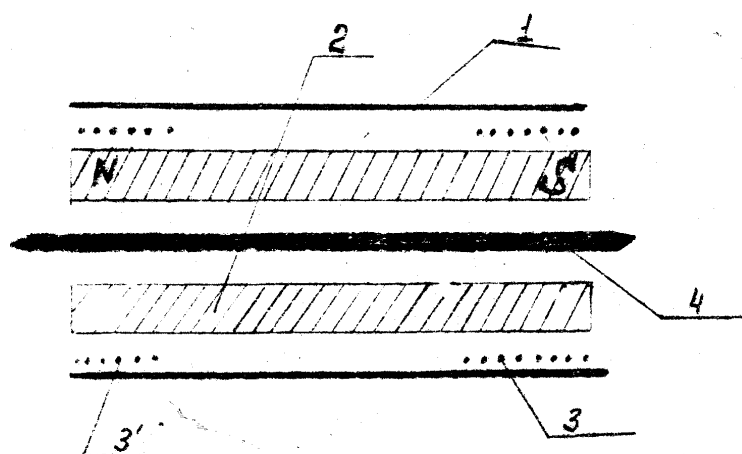


рис.6.

Механическая система (рис. 6) представляет собой отрезок металлической трубы /1/, в которую вставлен постоянный магнит /2/. В зазорах между магнитом и трубой расположены две катушки /3/ и /3'/, связанные общим стержнем /4/. Стержень укреплен на двух пружинках. Концы стержня имеют крепежные винты с помощью которых к подвижной части системы (стержень и катушка) прикрепляется дополнительный грузик. Это позволяет изменять собственную частоту механической системы.

Если через катушку /3/ пропустить электрический ток, то в результате взаимодействия магнитного поля и тока возникнет вынуждающая сила, направленная вдоль оси стержня, которая приведет в движение подвижную часть системы. В свою очередь, благодаря движению катушки /3/ в магнитном поле, в ее обмотке возникает ЭДС.

Система, в которой электрические колебания преобразуются в механические или наоборот, называется электро-механическим преобразователем. В нашем случае мы имеем двойное преобразование: электрический ток - механическое колебание - электрический ток. Рассматриваемая система конструктивно устроена так, что между силой тока J , текущего через катушку, и возникающей механической силой f в первом приближении существует линейная связь. Коэффициент пропорциональности \mathfrak{R} , связывающий электрические и механические величины, называется коэффициентом электро-механической связи.

Определим \mathfrak{R} . Рассмотрим малое перемещение δx катушки /3/ вдоль оси стержня, происходящее под действием электромагнитных сил.

Из теории электромагнетизма известно, что работа δA перемещения контура с током

J в магнитном поле

$$\delta A = kJ \delta \Phi,$$

где $\delta \Phi$ - изменение потока вектора магнитной индукции через контур при его перемещении, а k - коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерения. Так как с другой стороны $\delta A = f \delta x$, то сила f , действующая на контур в магнитном поле в направлении оси x (совпадающей по направлению с осью стержня).

$$f = kJ \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

Рассмотрим только малые перемещения катушки вдоль оси.

Тогда выражение для потока напряженности Φ через катушку можно разложить в ряд по степеням $(x - x_0)$, где x_0 - координата, соответствующая положению равновесия подвижной части системы.

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

а производная

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x_0} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_{x_0} (x - x_0) + \dots$$

Пренебрегая малыми членами порядка $x - x_0$, получим приближенно

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cong \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x_0} \quad (16)$$

и следовательно

$$\mathfrak{R} = \frac{f}{J} = k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x_0} \quad (17)$$

ЭДС индукции, возникающая в катушке /3'/ при ее перемещении в поле постоянного магнита

$$\varepsilon_i = -k \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -k \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \quad (18)$$

где Φ' - поток вектора магнитной индукции через катушку /3'/, так как катушки расположены симметрично относительно магнита, то $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi'}{\partial x}$ (увеличению потока Φ соответствует такое же уменьшение потока Φ'). Подставив в выражение (18) значение $k \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ из (16), и учтя (17), получим

$$\varepsilon_i = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x_0} v = \mathfrak{R}v$$

где $v = \frac{\partial x}{\partial t}$ - скорость перемещения подвижной части системы.

Итак, окончательно имеем

$$\mathfrak{R} = \frac{f}{J} = \frac{\varepsilon_i}{v} \quad (19)$$

Коэффициент электромеханической связи равен отношению механической силы возникающей в системе, к силе тока, протекающего в катушке и он также равен отношению ЭДС, наведенной в катушке, к скорости перемещения подвижной части системы.

Коэффициент электромеханической связи является важной характеристикой электромеханической системы, поскольку он связывает между собой электрические и механические величины. В частности, он позволяет вычислить затухание, которое будет дополнительно вноситься в систему, если зашунтировать какую-нибудь из катушек /3/ или /3'/ (или обе) активным сопротивлением.

Найдем выражение для коэффициента затухания α с учетом влияния шунта. Нагрузим одну из катушек, например /3'/, активным сопротивлением R_1 . В цепи катушки потечет ток

$$J = \frac{\varepsilon_i}{R_i + R_1} \quad (20)$$

где R_i - сопротивление обмотки катушки. Ток J вызовет появление некоторой силы f_3 , препятствующей движению. Из (19) и (20) имеем:

$$f_3 = \mathfrak{R}J = \mathfrak{R} \frac{\varepsilon_i}{R_i + R_1} = \frac{\mathfrak{R}^2 v}{R_i + R_1}$$

Сила f_3 пропорциональна скорости, а следовательно эквивалентна силе $f_{\text{мп}}$, вызывающей затухание при сухом трении.

Поскольку полная сила f , вызывающая затухание, оказывается равной сумме $f = f_3 + f_{\text{мп}}$, то для коэффициента затухания получаем

$$\alpha = \frac{f}{2mx'} = \frac{\mathfrak{R}^2}{2m(R_i + R_1)} + \frac{r}{2m}$$

Из полученного выражения следует, что для конкретной электромеханической системы с фиксированными \mathfrak{R} , R_i , m , коэффициент затухания можно регулировать шунтированием обмотки катушки внешним сопротивлением R_1 .

Как было сказано выше, напряжение ε_i , развиваемое во вторичной обмотке /3'/, равно $\mathfrak{R} \frac{\partial x}{\partial t}$, т.е. пропорционально скорости движения стержня /4/. Для того, чтобы выходное напряжение было пропорционально смещению стержня x , его нужно проинтегрировать по времени. Это можно сделать с помощью интегрирующей rc цепи. Известно, что если некоторое переменное напряжение ε подано на последовательно

включенные сопротивление r и емкость C , то напряжение U_c на конденсаторе будет с некоторым приближением равно

$$U_c = \frac{1}{rc} \int_0^t \varepsilon(t) dt$$

т.е. пропорционально интегралу от входного напряжения ε . (Более подробное описание работы интегрирующей rc -цепи дано в дополнении к настоящей работе). Следовательно, если к клеммам катушки /3'/ подключить rc -цепь, то выходное напряжение $U_{\text{вых}} = U_c$ будет равно

$$U_{\text{вых}} = \frac{1}{rc} \int_0^t \varepsilon_i dt = \frac{\Re}{rc} \int_0^t x' dt = \frac{\Re}{rc} x(t)$$

и, пропорционально смещению x подвижной части системы. Механическая вынуждающая сила f , возникающая в системе, согласно (19), равна $f = \Re J$, где J - ток в первичной катушке /3/. Если на катушку подано напряжение $U_{\text{вх}}$ от внешнего источника, а сопротивление цепи R , то вынуждающая сила

$$f = \Re J = \Re \frac{1}{R} U_{\text{вх}}$$

пропорциональна входному напряжению $U_{\text{вх}}$.

Таким образом, измерения механических величин x_1 и x (входящих в уравнение (6), описывающее механическую систему) в случае электромеханической системы заменяется измерением электрических напряжений $U_{\text{вых}}$ и $U_{\text{вх}}$, а это значительно облегчает измерения.

В лаборатории имеется модель электромеханической системы. В этой модели Труба /1/ разрезана. Это позволяет увидеть магнит /2/ и катушки /3/, /3'/, перед выполнением работы ознакомьтесь с этой моделью.

Схема включения электромеханической системы показана на рисунке 7.

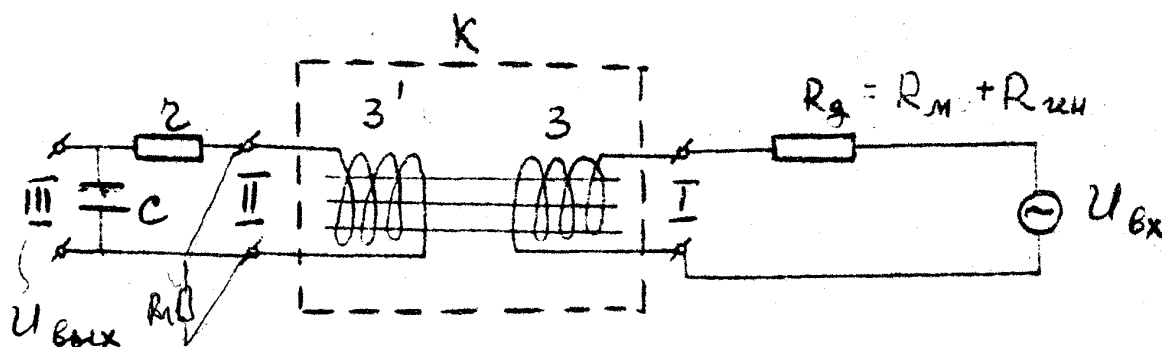


Рис. 7.

Здесь K - электромеханическая система (на рисунке показаны только катушки /3/ и /3'/, $U_{\text{вх}}$ - генератор синусоидального или импульсного напряжения. Сопротивление r и емкость C (смонтированы на панели) составляют интегрирующую цепь.

Сопротивление R_M нужно включить для того, чтобы не вносить дополнительного чрезмерного затухания в колебательную систему за счет шунтирования первичной

катушки малым выходным сопротивлением генератора. (В установке R_M включать не надо).

Напряжение $U_{вых}$ снимается с клемм III и подается на электронный осциллограф. К клеммам II можно подключить сопротивление R_I (магазин сопротивлений), для изменения затухания системы.

Колебательный контур также смонтирован на панели. Схема его включения приведена на рис.8.

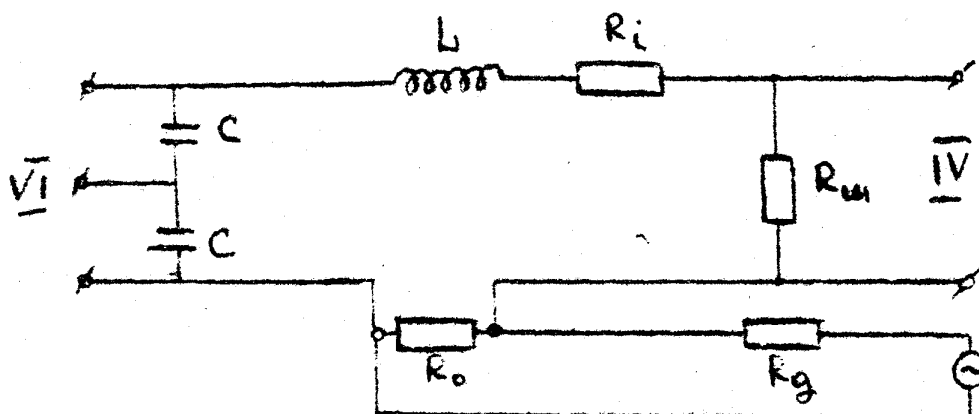


Рис.8.

Здесь L - катушка самоиндукции, R_i - ее внутреннее сопротивление, C - емкость (можно включить один конденсатор или два последовательно).

К клеммам IV подключается омическое сопротивление $R_{ш}$ (магазин сопротивлений). Выходное напряжение $U_{вых}$ снимается с клемм IV. Входное напряжение вводится в контур при помощи делителя напряжения $R_o R_g$. Величины R_o и R_g подбираются так, чтобы ослабление сигналов, вызываемое этим делителем, соответствовало ослаблению сигналов, обусловленному потерями энергии в интегрирующей цепи электромеханической системы. Введение делителя в схему продиктовано соображениями удобства работы, а именно - сохранить одинаковый уровень выходных сигналов как на электромеханической системе, так и на колебательном контуре при одинаковом уровне сигнала задающего генератора.

В роли входного сигнала колебательного контура в этом случае выступает падение напряжения на сопротивлении R_o .

При расчете коэффициента затухания α в формуле нужно писать сумму $R_i + R_o + R_{ш}$. В нашей установке $R_o = 62$ ома. Сопротивления R_g и $R_{ш}$ включаются и подбираются студентом.

Содержание и порядок работы с установкой

Работа состоит из двух основных частей: изучение и сопоставление процессов в обеих колебательных системах в режимах гармонического и импульсного воздействия.

Для получения гармонического внешнего воздействия ко входу исследуемой системы подключают генератор синусоидальных колебаний (звуковой генератор). Для возбуждения короткими импульсами - соответствующий генератор. Генератор коротких импульсов имеет два выхода - один дает импульсы, длительность которых мала по сравнению с промежутком между ними (соответствующие клеммы обозначены знаком $\text{—}\wedge\text{—}$), а второй - П-образные импульсы - длительность импульса равна длительности промежутка (знак $\text{—}\square\text{—}$ на клеммах).

Кроме того, на передней панели имеется тумблер, включающий генератор и ручка потенциометра, который позволяет менять частоту следования импульсов в некотором

интервале. Генератор питается постоянным напряжением 12в.

Прежде чем использовать генератор для возбуждения колебаний системы, полезно подать его выходное напряжение на осциллограф и посмотреть форму сигнала, зарисовать полученный сигнал в тетради и записать диапазон частот, даваемых генератором.

Выходной сигнал колебательной системы исследуют с помощью осциллографа.

Принцип действия и правила работы с осциллографом описаны в работе «Основные измерения с электронным осциллографом» в сборнике «Методические указания к лабораторным работам по физике» (Переменный ток и радиотехника) составитель доцент В.А.Соловьев. ЛОЛГУ 1964г. При подготовке к работе необходимо изучить описание этой работы.

Импульсный режим.

а/. Подключает генератор коротких импульсов ко входу механической системы. Наблюдают собственные колебания системы, используя для этого электронный осциллограф. Взяв $R_l = \infty$ (клеммы II на рис. 7 разомкнуты) определяют логарифмический декремент затухания λ и период затухающих колебаний T_c .

Для определения периода колебаний следует определить на экране осциллографа длину отрезка, содержащего целое число периодов. Затем нужно подать на осциллограф напряжение с генератора и подобрать частоту, при которой на этом отрезке укладывается целое число колебаний (не обязательно такое же).

В этом случае для получения устойчивой картины на экране следует включить внутреннюю синхронизацию. Если при включении внутренней синхронизации устойчивая картина не наблюдается, то нужно включить внешнюю синхронизацию. Синхронизирующий сигнал подавать от того же генератора (с крайних клемм). Измерив λ и T_c вычислить α и ω_0 . Проводят серию таких же измерений, меняя коэффициент затухания системы (подключая к клеммам II различные сопротивления R_l . Всего получают 4-5 серий измерений с различными R_l (по указанию преподавателя).

б/. Подключают генератор коротких импульсов ко входу колебательного контура, взяв $R_{ш} = 0$ (клеммы IV на рис.8 закорочены), проводят измерения, указанные в пункте а/.

Проводят серию таких же измерений, включая различные сопротивления $R_{ш}$.

в/. Экспериментально, методом подбора сопротивлений $R_{ш}$ переводят контур в апериодический режим.

Гармонический режим.

В этом случае ко входу исследуемой системы подключается генератор синусоидальных колебаний. Измерение выходных сигналов по-прежнему осуществляется электронным осциллографом.

Проводят следующие измерения: измеряют зависимость $U(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ для той и другой системы. Эти измерения проводят для тех же значений параметров системы, что и измерения с импульсным возбуждением, чтобы можно было сравнить полученные результаты.

Чтобы кривые $U(\omega)$ было удобнее сравнивать, их строят в нормированном по максимуму к единице масштабу, т.е. по оси ординат откладывают величину $\frac{U}{U_{\max}}$. Из полученных кривых определяют и вычисляют α . Окончательные результаты исследования приводят в таблице.

	Импульсное возбуждение			Гармоническое возбуждение	
	R_{III}	ω_0	α	ω_0	α
Электр.-мех. система					
Электрическая система					

и в виде серии кривых $\frac{U(\omega)}{U_{\max}}$ и $\alpha(\omega)$.

Определение параметров системы.

а/. К подвижной части механической системы (стержню) можно прикреплять различные грузики, меняя тем самым массу колеблющейся системы. Из формулы (5) имеем:

$$\omega_{0i} = \sqrt{\frac{k}{m + \Delta m_i}}$$

где Δm_i - масса i -го грузика, ω_{0i} - соответствующая собственная частота. Отсюда следует:

$$\Delta m_i = k \frac{1}{\omega_{0i}^2} - m$$

Меняя массу Δm_i , определяют соответствующие частоты ω_{0i} и строят график Δm_i от $\frac{1}{\omega_{0i}^2}$. Из графика определяют k и m . Это задание выполняется при $R_I = \infty$.

Примечание: добавочные грузы получите у лаборанта.

б/. Используя полученные раньше результаты для колебательного контура строят график зависимости α от R_{III} .

$$\alpha = \frac{R_0 + R_i + R_{III}}{2L}$$

Определяя отрезки, отсекаемые этой кривой по осям, определяют сопротивление катушки R_i и ее индуктивность.

Используя найденные значения R_i и L , а также емкость конденсатора C определяют критическое сопротивление $R_{кр}$ и сравнивают его с найденным экспериментально.

Дополнительные замечания.

1. О работе интегрирующей цепочки.

Рассмотрим простейшую интегрирующую цепочку

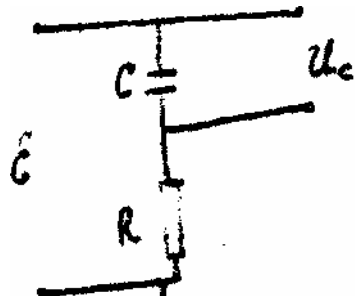


Рис. 9.

Пусть напряжение $U_{вх}$ подается на вход цепи, а выходное напряжение $U_{вых} = U_c$ снимается с емкости C .

Напряжение U_c равно

$$U_c = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t J dt$$

Ток J найдем из уравнения Кирхгофа

$$J = \frac{\varepsilon - U_c}{R}$$

и тогда для U_c получим

$$U_c = \frac{1}{RC} \left[\int_{t_0}^t \varepsilon dt - \int_{t_0}^t U_c dt \right]$$

Если выполняется условие

$$\left| \int_{t_0}^t U_c dt \right| \ll \left| \int_{t_0}^t \varepsilon dt \right| \quad (а)$$

то

$$U_c = \frac{1}{RC} \int_{t_0}^t \varepsilon dt \quad (б)$$

т.е. напряжение, снимаемое с конденсатора пропорционально интегралу от функции, описывающей изменение входного напряжения.

Оценим влияние параметров схемы на точность выражения (б). Для этого полагая, что неравенство (а) выполняется, подставим (б) в (а). Получим

$$\frac{1}{RC} \left| \int_{t_0}^t U_c dt \right| \ll |U_c| \quad (в)$$

Следовательно, точность выполнения операции интегрирования повышается при

увеличении RC , но одновременно, как видно из формулы (б) уменьшается разность потенциалов U_c .

Пусть входной сигнал имеет длительность τ_0 . Для оценки интеграла (в) можно написать

$$\int_{t_0}^t U_c dt \ll \int_{t_0}^{t_0+\tau_0} U_{c \max} dt = U_{c \max} \tau_0 \quad (\Gamma)$$

В то же время

$$U_{c \max} = \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_0+\tau_0} |J| dt < \frac{1}{RC} \int_{t_0}^{t_0+\tau_0} \varepsilon dt$$

Подставляя оценку $U_{c \max}$ и сравнивая с $\int_{t_0}^{t_0+\tau_0} \varepsilon dt$, получим: условие (а) вида $\frac{\tau_0}{RC} \ll 1$

Таким образом, величины RC нужно выбирать такими, чтобы RC -постоянная времени цепочки была много меньше длительности τ_0 изучаемого входного сигнала.

Обнаружение нелинейных явлений.

а/ Зависимость α от n $\alpha(n)$

Для линейной колебательной системы коэффициент затухания $\alpha = \frac{1}{T} \ln \frac{a_n}{a_{n+1}}$ не должен зависеть от номера амплитуды n .

При внимательном выполнении работы зависимость $\alpha(n)$ обнаруживается довольно четко. Это объясняется тем, что реальная установка не обладает достаточной линейностью для всего диапазона наблюдаемых амплитуд. Легко заметить, что $\frac{a_0}{a_{n+1}} > \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}$ и т.д. Это свидетельствует о том, что коэффициент α убывает с уменьшением амплитуды. Поэтому α целесообразно определять как среднюю величину

$$\alpha = \frac{1}{NT} \ln \frac{a_1}{a_N},$$

где a - начальная амплитуда; a_N - амплитуда в конце процесса, но еще достаточная для наблюдения, N - число периодов.

б/ Зависимость собственной частоты от амплитуды сигнала.

При измерении собственной ω_0 и резонансной частоты легко заметить, что они зависят от амплитуды сигнала. Это происходит от того, что электрический колебательный контур выполнен на катушке с ферромагнитным сердечником.

Индуктивность такой катушки L пропорциональна магнитной проницаемости μ сердечника, которая в свою очередь зависит от величины амплитуды магнитного поля H . Амплитуда же поля оказывается пропорциональной амплитуде действующих на колебательном контуре колебаний.

В конечном счете L оказывается зависимой a , что и проявится при экспериментальном определении частот ω_0 и ω_p как зависимости

$$\omega_0 = \omega_0(a) \quad \text{и} \quad \omega_p / \omega_p(a)$$

В целом, теоретический анализ, проведенный в предположении, что рассматриваемые системы линейны, оправдан, т.к. отличие от линейности незначительно и полученные теоретические выводы о поведении систем согласуются с экспериментом.

3. Повышение чувствительности установки.

При исследовании механической системы может оказаться, что мощность генератора слишком мала для возбуждения системы короткими импульсами. Тогда для возбуждения системы нужно использовать П-образные импульсы, при этом начальная амплитуда будет больше. Кроме того, выходной сигнал можно снимать прямо с клемм катушки /3/, минуя интегрирующую цепочку.

В этом случае измеряемая величина будет не смещение x , а скорость $\frac{dx}{dt}$.

Однако легко показать, дифференцируя формулу (8), что скорость будет описываться функцией

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dU}{dt} = U_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t - \psi)$$

с теми же параметрами α и ω_c .