

## Основные закономерности движения простых колебательных систем

Колебательными принято называть системы, в которых возможно возникновение колебательного движения. Необходимыми условиями для этого являются наличие инерции (массы) и существование положения устойчивого равновесия, т.е. такого положения системы, отклонение от которого в любом направлении вызывает появление возвращающих, направленных к исходному положению, сил. Под действием этих сил система, выведенная каким-либо воздействием из исходного положения, придет в движение, стремясь вернуться к начальному состоянию. Но, подойдя к исходному положению с конечной скоростью, она, благодаря инерции, пройдет это положение, что вызовет вновь появление возвращающей силы, и т.д. Такое движение называется **колебательным**.

Наиболее удобным и простым объектом для исследования колебательных процессов является механическая система с одной степенью свободы, т.е. такая система, положение которой в пространстве в любой момент времени полностью определяется одним числом – координатой. Классическим примером такой системы является груз, подвешенный на пружине таким образом, что он имеет возможность перемещаться, скользя по направляющим, вверх и вниз по вертикали (**Рис.1**).

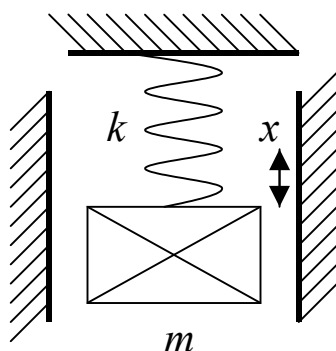


Рис. 1

Не следует думать, что системы с одной степенью свободы всегда очень просты. Так, например, шестицилиндровый двигатель внутреннего сгорания с жестко укрепленным блоком цилиндров имеет вместе со всеми своими поршнями, шатунами, клапанами, валом и т.п. одну степень свободы, так как положение любой движущейся части определяется одним только числом – углом поворота коленчатого вала.

Колебательное движение, происходящее без действия внешних сил, под действием одних только внутренних сил системы, представляет собой **свободное колебание** (разумеется, внешняя сила необходима, чтобы вызвать первоначальное отклонение от равновесия, но в дальнейшем её действие прекращается).

Колебания называются **простыми гармоническими**, если они описываются уравнением

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

Здесь  $x$  – смещение от положения равновесия,  $t$  – время,  $\omega$  – круговая, или угловая частота,  $A$  – амплитуда,  $\varphi$  – начальная фаза. Все выражение  $(\omega t + \varphi)$  называется **фазой** колебания. **Круговая частота**  $\omega$  связана с **циклической частотой**  $\nu$  (числом колебаний в

единицу времени) и **периодом колебаний**  $T$  формулами  $\omega = 2\pi\nu$  и  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Единица

измерения круговой частоты в системе единиц СИ – **радиан в секунду (рад/с)**. Единицу циклической частоты  $\nu$  – **одно колебание в секунду, Герц, Гц** – во избежание путаницы не следует обозначать  $s^{-1}$ .

Свободное колебание системы является простым гармоническим, если возвращающая сила хотя бы в первом приближении (при малых смещениях) пропорциональна смещению, т.е. является **квазиупругой** силой. Тогда дифференциальное уравнение движения может быть представлено в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (2)$$

где  $m$  определяет инерцию системы, а  $(-kx)$  есть возвращающая сила (в обобщенном смысле, см. ниже). Для простейшей системы, показанной на **Рис.1**,  $m$  есть просто масса груза, а  $(-kx)$  – упругая сила, действующая на груз со стороны пружины. В других случаях обобщенные коэффициенты в уравнении (2) могут иметь другой, более сложный смысл. Так, для физического маятника на месте величины  $m$  будет стоять момент инерции (разумеется, все это в других обозначениях), а на месте  $(-kx)$  – момент силы тяжести относительно точки подвеса (роль смещения  $x$  в этом случае играет угол поворота маятника).

Частота собственных колебаний связана с коэффициентами уравнения (2):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0 \quad (3)$$

что проверяется непосредственной подстановкой (1) в (2). Постоянные  $A$  и  $\varphi$  при такой подстановке остаются неопределенными, они находятся из начальных условий – значений смещения и скорости в момент  $t = 0$  (момент начала свободных колебаний, т.е. момент прекращения действия вызывающих колебание внешних сил).

Реальные системы никогда не подчиняются уравнению (2): в них всегда действуют диссипативные силы, превращающие механическую энергию в тепловую. Простейшим, с математической точки зрения, примером таких сил являются силы вязкого трения, возникающие при не очень быстром движении в жидкости или газе; они пропорциональны скорости движения и направлены противоположно скорости. С учетом таких сил дифференциальное уравнение движения будет иметь вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} \quad (4)$$

Может показаться, что более простым случаем были бы силы сухого трения, не зависящие от скорости. В действительности этот случай очень сложен, движение при этом пришлось бы описывать не одним уравнением, а двумя:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - F_{\text{тр}}, \quad \text{когда } \frac{dx}{dt} > 0$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F_{\text{тр}}, \quad \text{когда } \frac{dx}{dt} < 0$$

и каждый полупериод пришлось бы переходить от одного уравнения к другому. Численный расчёт для какого-либо конкретного случая здесь не сложен, но общего аналитического решения дать невозможно.

Система, изображенная на **Рис.1**, будет подчиняться уравнению (4), если между грузом и направляющими поместить слой вязкой жидкости. Во многих случаях можно считать, что уравнение (4) описывает систему хотя бы приближенно. Системы, для которых это имеет место, т.е. для которых возвращающую силу можно считать пропорциональной смещению, а диссипативную силу – пропорциональной скорости смещения, называются **линейными**, так как они описываются линейным дифференциальным уравнением. Решение уравнения (4) при не очень больших значениях коэффициента трения  $r$  имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

(это проверяется подстановкой, см. ниже). Иначе говоря, свободное колебание при наличии трения представляет собой **затухающее гармоническое колебание**. Действительно, движение, описываемое формулой (5), можно рассматривать как гармоническое колебание с экспоненциально убывающей амплитудой:

$$A = A_0 e^{-\beta t} \quad (6)$$

где  $A_0$  – начальная (в момент времени  $t=0$ ) амплитуда.

Подстановка (5) в (4) даёт, после сокращения на общий множитель, уравнение, содержащее в левой части члены, пропорциональные  $\cos \omega_{\text{св}} t$  и  $\sin \omega_{\text{св}} t$ , а в правой – нуль.

Это уравнение может выполняться при любых  $t$  только если суммы коэффициентов при  $\cos \omega_{\text{св}}t$  и  $\sin \omega_{\text{св}}t$  по отдельности равны нулю. Отсюда получается

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2} \quad (7)$$

$$\beta = \frac{r}{2m} \quad (8)$$

$$\omega_{\text{св}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (9)$$

(указанные расчеты следует провести самостоятельно).

Таким образом, частота свободных колебаний системы с трением  $\omega_{\text{св}}$  несколько ниже, чем частота колебаний той же системы, но без трения. Последние называются **собственными колебаниями**. Однако это различие становится заметным только тогда, когда затухание колебаний велико (сравнимо с  $\beta$ ) Величина  $\beta$  называется **показателем**, или **коэффициентом затухания**. Согласно (6), её можно определить, зная значения амплитуды колебаний  $A_1$  и  $A_2$  в какие-либо два момента времени  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\beta = \frac{\ln(A_1/A_2)}{t_2 - t_1} \quad (10)$$

Легко видеть, что коэффициент затухания плохо определяет степень отклонения колебания от простого гармонического: при одном и том же значении  $\beta$  очень высокочастотное колебание можно считать почти гармоническим, а низкочастотное – нельзя. Поэтому обычно предпочитают скорость затухания соотносить не времени  $t$ , а периоду

свободного колебания  $T_{\text{св}} = 2\pi/\omega_{\text{св}}$ , заменяя  $\beta = \lambda/T_{\text{св}}$  и записывая формулу (5) в несколько другом виде

$$x = A_0 e^{-\lambda \frac{t}{T_{\text{св}}}} \cos(\omega t + \varphi) \quad (5a)$$

Величина  $\lambda$  называется **логарифмическим декрементом затухания** и имеет смысл логарифма отношения двух последовательных отклонений, разделенных отрезком времени, равным периоду свободных колебаний  $T_{\text{св}}$ .

$$\lambda = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t + T_{\text{св}})}\right) \quad (11)$$

Из формулы (5а) видно, что величина  $1/\lambda$ , обратная декременту (точнее, целая часть этого числа), **равна количеству колебаний, за которое амплитуда уменьшится в  $e=2,718...$  раз.** Сравнивая (5) и (5а), видим, что

$$\lambda = \beta T_{\text{св}} = 2\pi \frac{\beta}{\omega_{\text{св}}} \quad (12)$$

При малых  $\beta$ , когда,  $\omega_{\text{св}} \approx \omega_0$ , можно написать

$$\lambda = 2\pi \frac{\beta}{\omega_0} = \pi \frac{r}{m\omega_0} = \pi \frac{\omega_0 r}{k} = \pi \frac{r}{\sqrt{km}} \quad (13)$$

При синусоидальном колебании, как нетрудно убедиться,  $kA$  есть амплитуда упругой силы,  $r\omega_0 A$  – амплитуда вязкой силы,  $m\omega_0^2 A$  – амплитуда силы инерции. Таким образом, **логарифмический декремент пропорционален отношению амплитуды вязкой силы к амплитуде упругой силы** или силы инерции.

Когда  $\beta \geq \omega_0$ , очевидно, что уравнение (9) теряет смысл. Решение уравнения (4) тогда имеет вид

$$x = (A + \beta t)e^{-\beta t}, \quad \text{если } \beta = \omega_0 \quad (14)$$

$$x = (Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t})e^{-\beta t}, \quad \text{если } \beta > \omega_0 \quad (15)$$

где  $\alpha = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ , а  $A$  и  $B$  – произвольные постоянные. Уравнения (14) и (15) описывают аperiodическое возвращение системы к положению равновесия. Случай  $\beta = \omega_0$ , разграничивающий периодический (колебательный) и аperiodический режимы движения системы, называется **критическим**. Он соответствует наиболее быстрому возвращению системы в равновесие.

Рассмотрим теперь **вынужденные колебания**, т.е. колебания, происходящие под действием внешней силы. Пусть в колебательной системе (см. **Рис.1**), подчиняющейся уравнению (4), на груз действует периодически меняющаяся во времени сила

$$F = F_0 \cos \omega t \quad (16)$$

(это простейший случай, более сложные случаи рассматривать не будем).

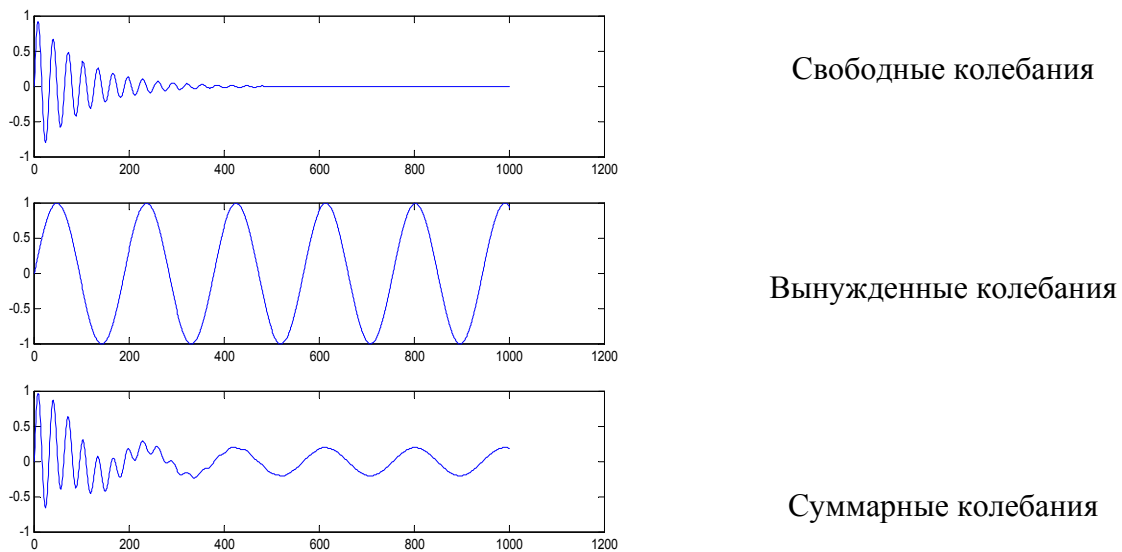
Уравнение движения запишем в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (17)$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение. Его общее решение равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения (4), т.е. свободного колебания (5), и частного решения уравнения (17), имеющего вид

$$x = B \cos(\omega t + \delta), \quad (18)$$

т.е. вид гармонического колебания с частотой вынуждающей силы. Для случая  $\omega \ll \omega_{\text{св}}$  это показано на **Рис.2**

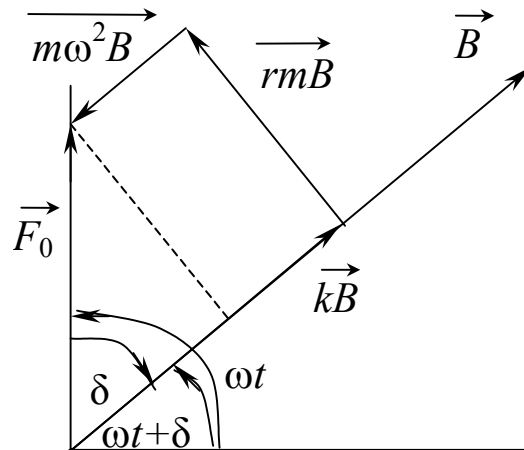


**Рис.2.**

Амплитуда и фаза свободного колебания определяются начальными условиями. Однако поскольку свободные колебания являются затухающими, они через некоторое время практически исчезают, и остаются только вынужденные колебания (18). Такое движение, устанавливающееся через достаточно длительное время  $t \gg \frac{1}{\beta}$  после включения силы, называется установившимся или **стационарным**, а начальная стадия, когда имеется наложение двух колебаний, называется **переходным процессом** или **процессом установления**. Мы будем рассматривать только установившийся процесс.

Вычисление  $B$  и  $\delta$  из уравнения (17) проще всего провести, пользуясь методом векторных диаграмм. Нетрудно видеть, что величину  $x$  при гармоническом колебании (18) можно рассматривать как проекцию на некоторую ось вектора  $u$  имеющего длину  $B$  и составляющего с этой осью угол  $\omega t + \delta$ . Будем говорить, что  $x$  "изображается" таким

вектором  $\vec{B}$ . Таким же образом будем представлять и другие величины, колеблющиеся с той же частотой  $\omega$ . При этом сдвиги фаз изобразятся углами между соответствующими векторами. Такое представление полезно в силу известной теоремы: проекция геометрической суммы векторов на некоторую ось равна алгебраической сумме их проекций. Поэтому решение уравнения (17) сводится к построению геометрической суммы векторов, изображающих отдельные слагаемые левой части уравнения, и приравнению ее к вектору, изображающему правую часть. Построение показано на **Рис.3**.



**Рис.3**

При этом учтено, что величина

$$r \frac{dx}{dt} = -r\omega B \sin(\omega t + \delta) = r\omega B \cos\left(\omega t + \delta - \frac{\pi}{2}\right),$$

опережающая  $x$  по фазе на  $\pi/2$ , изобразится вектором  $r\omega\vec{B}$ , повернутым на  $\pi/2$  относительно вектора  $\vec{B}$ . Аналогично, вектор  $m\omega^2\vec{B}$  – изображение величины  $m \frac{d^2x}{dt^2}$  – повернут относительно  $\vec{B}$  на угол  $\pi$ .

Из теоремы Пифагора для треугольника, отсеченного пунктиром, находим сразу

$$F_0^2 = (kB - m\omega^2 B)^2 + (r\omega B)^2$$

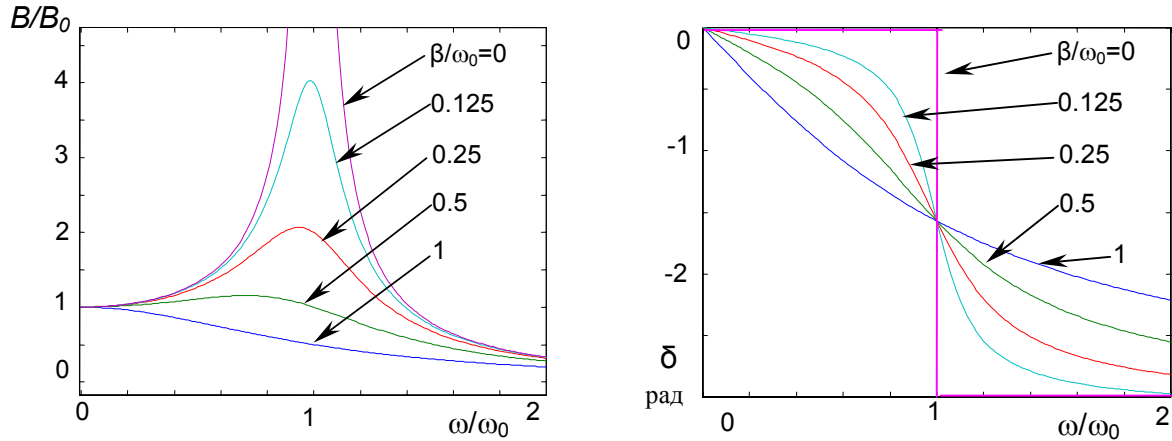
откуда

$$B(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (r\omega)^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2}\right)^2}} \quad (19)$$

Из того же треугольника

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{r\omega}{m\omega^2 - k} = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (20)$$

Серия кривых частотной зависимости амплитуды  $B$  и фазы  $\delta$  вынужденных колебаний для разных значений  $\beta$  показана на **Рис.4**.



**Рис.4.**

График зависимости амплитуды  $B$  от частоты  $\omega$  называется **резонансной кривой**. Обратите внимание на следующие свойства резонансных кривых:

1. При низких частотах  $\omega$  амплитуда приближается к величине статического смещения  $B_0$ , вызываемого силой, равной  $F_0$ :  $B \rightarrow F_0/k = B_0$ , а так как в этом случае фаза  $\delta \rightarrow 0$ , то  $x = F/k$ , т.е. смещение определяется только упругой силой, как при статическом растяжении. Инерция и вязкое трение практически не играют роли. Физическую причину этого легко понять, рассматривая уравнение (17). Подставляя в него выражение (18) для  $x$  получим

$$-m\omega^2 B \cos(\omega t + \delta) - r\omega B \sin(\omega t + \delta) + kB \cos(\omega t + \delta) = F_0 \cos \omega t \quad (17a)$$

При  $\omega \rightarrow 0$  первый член (сила инерции) и второй член (сила трения) исчезают, и внешняя сила должна преодолевать только упругую силу. Таким образом, при низких частотах колебание происходит **квазистатически**.

2. При увеличении частоты появляются и сила инерции, и сила трения, тем не менее, если вязкие силы невелики, амплитуда больше, чем при статическом растяжении. Почему? (См. (17a)).

3. При  $\omega = \omega_0$  фаза  $\delta = \pi/2$  и, как нетрудно убедиться,  $\frac{dx}{dt} = \frac{F}{r}$ , т.е. внешней силе  $F$  приходится преодолевать только силу трения  $r \frac{dx}{dt}$ . Почему? (См. (17a)).



4. При высоких частотах  $\omega \rightarrow \infty$  амплитуда стремится к нулю как  $1/\omega^2$ . Действительно, в этом случае можно пренебречь вторым и третьим членами в левой части уравнения (17а). Внешняя сила должна преодолевать силу инерции, которая оказывается большой, так что движение практически невозможно.

5. Если трение невелико, то амплитуда имеет максимум. Частота  $\omega_{\text{рез}}$ , соответствующая максимуму амплитуды, называется **частотой резонанса** (точнее – частотой **резонанса смещений**). Её можно найти, дифференцируя (19) по  $\omega$ :

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (21)$$

При малом трении,  $\beta \ll \omega_0$ , резонансная частота близка к собственной частоте  $\omega_0$ . Амплитуда скорости имеет максимум всегда при частоте  $\omega_0$ , так что частоту  $\omega_0$  можно назвать частотой **резонанса скоростей**.

6. Чем меньше трение, тем выше резонансный максимум (при  $\beta=0$  амплитуда при резонансе становится бесконечно большой). Найдем выражение для амплитуды при резонансе  $B_{\text{рез}}$ . Ограничимся случаем малого трения  $\beta \ll \omega_0$ , когда можно считать  $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$ . Подставив в выражение (19)  $\omega = \omega_0$ , получим

$$B_{\text{рез}} \approx \frac{F_0/k}{2\beta/\omega_0} = B_0 \frac{\pi}{\lambda} \quad (22)$$

Отношение  $\frac{B_{\text{рез}}}{B_0} = Q = \frac{\pi}{\lambda}$  называют **добротностью колебательной системы**.

Формула (22) даёт связь добротности с логарифмическим декрементом.

7. Чем меньше трение, тем острее резонансный максимум. Для того чтобы характеризовать остроту максимума, найдем частоту, **при которой амплитуда уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с резонансной**. Рассмотрим случай малого трения  $\beta \ll \omega_0$ . Подставляя в (19)  $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$ , получаем

$$B_{\text{рез}} \approx \frac{F_0}{r\omega_0}$$

Если пик на резонансной кривой узкий, то в пределах этого пика можно считать величину  $r\omega$  в формуле (19) почти постоянной и заменить её на  $r\omega_0$ . Подкоренное выражение в (19) будет вдвое больше, чем при резонансе (т.е. амплитуда в  $\sqrt{2}$  раз меньше, чем при резонансе), когда  $|k - m\omega^2| = r\omega_0$ . С другой стороны,

$$k - m\omega^2 = m(\omega_0^2 - \omega^2) = m(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx 2m(\omega_0 - \omega)\omega_0$$

Итак, при частотах  $\omega$ , определяемых уравнением

$$2 \frac{(\omega_0 - \omega)}{\omega_0} \approx \frac{r}{m\omega_0} \approx \frac{\lambda}{\pi} = \frac{1}{Q} \quad (23)$$

амплитуда колебаний в  $\sqrt{2}=1.414$  раз меньше, чем при резонансе.

Выражение, стоящее в левой части уравнения (23), определяет ширину резонансной кривой на уровне  $1/\sqrt{2} \approx 0.707$ . Отсюда непосредственно следует способ определения добротности, логарифмического декремента и коэффициента затухания колебательной системы из резонансной кривой:

$$Q = \frac{\omega_0}{|\omega_1 - \omega_2|}, \quad \lambda = \frac{\pi}{Q}, \quad \beta = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2} \quad (24)$$

где  $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$  – частоты, для которых  $B = \frac{1}{\sqrt{2}} B_{\text{рез}}$ . Из формул видно, что резонансная кривая тем уже, чем больше добротность. Подумайте, как это согласовать с тем, что на **Рис.4** кривые для больших  $\beta$  (малые  $Q$ ) лежат внутри кривых для малых  $\beta$ .

## Формулы, которые следует помнить

<b>Уравнение движения</b>		
$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = \begin{cases} 0 & \text{- свободные колебания} \\ F_0 \cos \omega t & \text{- вынужденные колебания} \end{cases}$		
<b>Закон движения</b>		
$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi); \quad x = A_0 e^{-\lambda \frac{t}{T_{\text{св}}}} \cos(\omega t + \varphi)$		
<b>Резонансная кривая</b>		
$B(\omega) = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\beta}{\omega_0} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$		$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\beta}{\omega_0} \cdot \frac{\omega/\omega_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$
$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\beta = \frac{r}{2m}$
$\omega_{\text{св}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$		$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$
$\lambda = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t + T_{\text{св}})}\right)$		$\lambda = 2\pi \frac{\beta}{\omega_0} = \pi \frac{r}{\sqrt{km}}$
$\frac{B_{\text{рез}}}{B_0} = Q = \frac{\pi}{\lambda}$	$Q = \frac{\omega_0}{ \omega_1 - \omega_2 }, \quad \lambda = \frac{\pi}{Q}, \quad \beta = \frac{ \omega_1 - \omega_2 }{2}$	

### Задача работы и экспериментальная установка

Целью работы является изучение свободных и вынужденных колебаний простой колебательной системы, экспериментальная проверка полученных выше соотношений и определение основных параметров системы.

Изучаемая колебательная система показана на **Рис.5**. Она представляет собой упругий стержень, жестко закрепленный одним концом в массивной подставке и нагруженный на свободном конце массой  $M$  (хомутик с зажимным винтом и сменной гирькой). Длину свободной части стержня и величину нагружающей массы можно произвольно менять; их следует выбирать по указанию преподавателя.

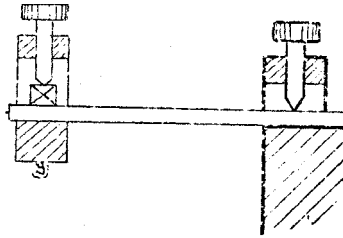


Рис. 5

Коэффициент возвращающей силы  $k$  для такого вибратора определяется геометрическими размерами стержня и модулем Юнга материала, из которого он сделан. Если на свободный конец стержня длины  $l$ , ширины  $b$  и толщины  $d$  действует изгибающая сила  $P$  как показано на Рис.6,

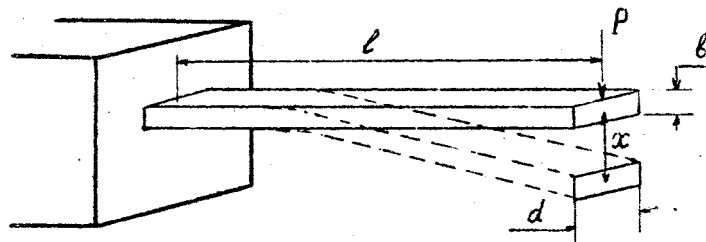


Рис.6

то смещение второго конца  $x$  (стрела изгиба) равно

$$x = \frac{4Pl^3}{Ebd^3}$$

(Вывод этой формулы приведён в описании работы "Определение модуля Юнга по изгибу стержня"). Следовательно,

$$k = \frac{P}{x} = \frac{Ebd^3}{4l^3} \quad (25)$$

Если модуль упругости материала неизвестен, то коэффициент возвращающей силы можно найти экспериментально, нагружая конец стержня различными грузами и измеряя его смещение.

Колеблющаяся масса  $m$  была бы равна массе груза  $M$  только при полной невесомости стержня. На самом деле масса самого стержня  $\mu$  тоже принимает участие в колебаниях. Однако не все части стержня колеблются с одинаковой амплитудой. Последовательный расчет показывает, что если масса стержня невелика,  $\mu \ll M$ , то для учета влияния инерции стержня можно прибавить к массе груза 25% массы стержня. На практике взвешивать, естественно, приходится весь стержень длиной  $L$ , включая зажатый конец. Тогда  $\mu = \mu' l / L$ . Таким образом, окончательно

$$m = M + 0.23 \frac{l}{L} \mu' \quad (26)$$

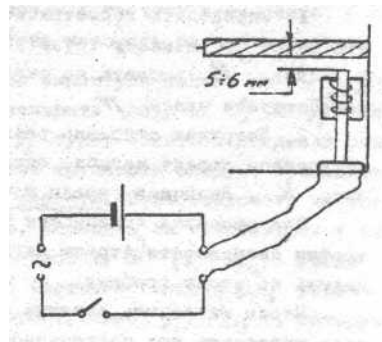
Собственная частота колебаний системы  $\Omega_0$  определяется величинами  $k$  и  $m$  и вычисляется по формуле (3)

Стержень с равномерно распределенной массой, строго говоря, не является системой с одной степенью свободы. Его мгновенное состояние задано, если известны координаты всех его "частиц" (т.е. физически бесконечно малых элементов объёма). Поскольку число таких частиц *практически* бесконечно, то бесконечно и число степеней свободы стержня. Для решения задачи о колебаниях стержня нужно рассматривать распространение в нём упругих волн. Стационарные колебания стержня представляют собой, в сущности, стоячие волны. Наличие многих степеней свободы приводит к тому, что стержень имеет не одну резонансную частоту, а много (подобно основному тону и высшим гармоникам струны). Частота, вычисленная по формуле (3) – это самая низкая из резонансных частот. Пока мы не переходим к частотам колебаний, близким к следующей резонансной частоте, можно с хорошим приближением рассматривать стержень как систему с одной степенью свободы, для которой постоянные  $k$  и  $m$  даются формулами (25) и (26).

Для наблюдения колебаний и для измерения амплитуды, а также для измерения смещения при определении коэффициента возвращающей силы, применяется длиннофокусный **микроскоп** с окулярной микрометрической шкалой (цена деления 0,1 мм). Микроскоп должен быть сфокусирован на стрелку-указатель, укрепленную на конце стержня.

Для возбуждения вынужденных колебаний применяется **электромагнит**, питаемый от генератора звуковых частот. Описание генератора выдается в лаборатории.

Схема питания магнита показана на **Рис.7**.



**Рис.7.**

Батарея 40 В применяется для создания постоянного тока подмагничивания. Если бы её не было, вибратор колебался бы не с частотой генератора, а с удвоенной частотой, притягиваясь к магниту каждый полупериод, независимо от направления тока в магните.

Электромагнит укрепляется на расстоянии 5 – 6 мм под стержнем, у его основания, как показано на **Рис.7**. Обратите внимание, что сила притяжения стержня к электромагниту должна как можно меньше зависеть от изгиба стержня – в противном случае изучаемая система будет описываться вовсе не уравнением (17), а совсем другим, нелинейным уравнением:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cdot f(x) \cdot \cos \omega t$$

Чтобы этого не произошло, следует установить амплитуду напряжения на выходе генератора в любом случае максимальной, а затем уменьшить амплитуду возбуждающей силы до необходимого уровня путем удаления сердечника электромагнита от стержня и приближения электромагнита к точке крепления стержня.

Для определения частоты колебаний применяется **строботахометр**. Он представляет собой генератор высоковольтных импульсов, питающий импульсную газоразрядную лампу. Частота следования импульсов может плавно меняться в пределах от 5 до 500 Гц.

Если лампой тахометра освещать быстро вращающийся или колеблющийся предмет, то при равенстве частоты вращения или колебания частоте следований вспышек предмет будет казаться неподвижным – это так называемый стробоскопический эффект. Тогда по шкале частот тахометра можно отсчитать частоту изучаемого процесса.

Стробоскопический эффект имеет место не только тогда, когда частота следования вспышек равна частоте изучаемого процесса, но и тогда, когда она в целое число раз меньше. Поэтому, если приблизительное значение частоты заранее не известно, то надо начать настройку тахометра с самой высокой частоты и, постепенно ее понижая, найти самую высокую из частот, при которой вибратор кажется неподвижным. Это и будет частота его

колебаний. При частотах вспышек, выражаемых числами вида  $\frac{m}{n}V$ , где  $V$  - измеряемая частота, а  $m$  и  $n$  – целые числа, объект будет виден одновременно в  $m$  неподвижных точках. Это обстоятельство полезно учитывать в процессе синхронизации.

Правила включения строботахометра и работы с ним даны в **приложении**. **Перед работой обязательно ознакомьтесь с ними.**

## Порядок работы

**Примечание!** Данная работа предполагает большой объем довольно медленных настроек и измерений, причем основная ее часть посвящена исследованию колебаний. Поэтому "статическую" ее часть (пп.1\*,2\*) целесообразно выполнять либо очень быстро, либо в конце работы, по окончании исследования вынужденных и свободных колебаний.

**1\***. Определить геометрические размеры стержня  $L$ ,  $l$ ,  $d$ , его массу  $\mu'$  и массу груза  $M$  (длину свободной части стержня  $l$  и величину  $M$  выбрать по указанию преподавателя). Рассчитать колеблющуюся массу.

**2\***. Нагружая стержень различными грузами и измеряя с помощью микроскопа стрелу изгиба, найти коэффициент возвращающей силы. при этом для проверки линейности упругих

свойств стержня построить график зависимости стрелы изгиба от нагрузки, постоянную  $k$  определить по этому графику. Величина стрелы изгиба не должна превосходить 5 – 6 мм.

Чтобы исключить влияние остаточной деформации, измерения надо проводить при постепенном увеличении нагрузки и постепенном её уменьшении.

По найденным величинам  $k$  и  $m$  подсчитать частоту собственных колебаний  $\Omega_0$  и  $V_0 = \Omega_0 / 2\pi$ . По данным одного какого-либо измерения следует уже в лаборатории подсчитать ориентировочное значение собственной частоты колебаний  $V_0$ , которое понадобится » дальнейшей работе.

**3.** Для изучения вынужденных колебаний собрать схему питания магнита. С разрешения преподавателя включить генератор, установить частоту по его шкале в соответствии с расчетной собственной частотой  $V_0$  и максимальную амплитуду выхода. Наблюдая за указателем в микроскоп, настроить генератор на резонансную частоту стержня (колеблющийся указатель кажется размытым в полоску, граница которой отмечает амплитуду колебаний). Помните, что после каждого измерения частоты нужно выждать некоторое время (порядка  $3/\beta$ ), чтобы амплитуда приняла стационарное значение. Когда резонанс будет достигнут, следует отрегулировать **положение магнита** так, чтобы амплитуда при резонансе  $V_{рез}$  равнялась 2...5 мм, заполняя все поле зрения микроскопа, после чего можно приступать к измерениям.

При тонкой перестройке частоты в окрестности резонанса пользуйтесь не основной (грубой) ручкой перестройки генератора, а ручкой плавной настройки "**Отстройка частоты %**". При определении частоты не обращайте внимания на показания шкалы частот генератора. Измерять частоту следует стробоскопически, освещая лампой строботактометра указатель и измеряя частоту медленного периодического движения стробоскопического изображения указателя. Наиболее удобно подобрать комбинированное – стробоскопическое и обычное освещение так, чтобы одновременно видеть и размытую полоску, отмечающую амплитуду колебаний, и на ее фоне – мгновенное положение указателя при вспышках стробоскопа.

Рекомендуется подобрать условия освещения и наблюдения так, чтобы отражение излучения от поверхности стержня было близко к зеркальному. При этом ось микроскопа вполне может быть установлена слегка наклонно по отношению к стержню. Весьма рекомендуется также установить позади стержня по оси наблюдения черный экран (в качестве него вполне подходит магазин сопротивлений из черной пластмассы). Можно также попеременно включать обычное и стробоскопическое освещение и измерять амплитуду и частоту поочередно.

Для определения затухания нужно измерить разность частот  $\nu_1 = \omega_1/2\pi$  и  $\nu_2 = \omega_2/2\pi$ , при которых амплитуда падает до  $B = \frac{1}{\sqrt{2}} B_{рез}$ . Эта разность очень мала, и если измерять частоты  $\nu_1$  и  $\nu_2$  непосредственно по шкалам генератора или строботахометра, то разность  $\nu_1 - \nu_2$  будет лежать в пределах ошибки измерений. Для преодоления этой трудности применяется **дифференциальный метод измерения частоты**. Этот важный метод заключается в следующем. Строботахометр настраивается на частоту  $\nu_{рез}$  по условию получения **очень медленного** движения стробоскопического изображения колеблющегося стержня (**абсолютную неподвижность** получить крайне трудно, причем из-за нестабильности частот генератора и строботахометра она через некоторое время неизбежно нарушается). Затем, наблюдая за колебаниями в микроскоп **и не трогая строботахометр**, настраивают генератор на частоту  $\nu_1 > \nu_{рез}$ . Тогда при стробоскопическом освещении с частотой вспышек  $\nu_{рез}$  указатель кажется колеблющимся с частотой, равной  $\nu_1 - \nu_{рез}$ , которую легко измерить **по ее периоду** с помощью секундомера. Далее генератор настраивается на частоту  $\nu_2 < \nu_{рез}$  и точно так же измеряется кажущаяся частота колебаний указателя, равная  $\nu_{рез} - \nu_2$ . Искомая разность частот  $\nu_1 - \nu_2$  равна сумме этих кажущихся **частот биений**.

Поскольку при таком методе измерения частоты  $\nu_1$  и  $\nu_2$  непосредственно не отсчитываются по строботахометру, их разность измеряется с большой точностью, причем тем большей, чем меньше значение этой разности. **Важно только, чтобы частота вспышек оставалась строго постоянной, при этом она может и не быть точно равна  $\nu_{рез}$ . Поэтому при измерениях дифференциальным методом не трогайте ручки настройки строботахометра.**

Точно настроить частоту возбуждающей силы на заданную точку резонансного контура довольно трудно (этому в особенности мешают биения между свободными и вынужденными колебаниями, возникающие всякий раз при любой перестройке как частоты, так и амплитуды, и дезориентирующие при настройках). Поэтому вполне рационально провести измерения в нескольких точках на склонах резонансного контура в окрестности искомых точек, а затем построить **график амплитуды колебаний как функции частоты биений** и определить показатель затухания по этому графику.

Из проведенных измерений следует определить следующие величины:

- резонансную частоту  $\omega_{рез}$  (измеряется непосредственно);
- добротность  $Q$ , логарифмический декремент  $\lambda$  и коэффициент затухания  $\beta$  (формулы (24));
- собственную частоту  $\omega_0$  (формула (21)),



- коэффициент возвращающей силы  $k$  (формула (3))
- коэффициент трения  $r$  (формула (6)),

Если есть время, можно построить также полную резонансную кривую вибратора, используя ручку "расстройка %" генератора. Кривую следует построить как график зависимости амплитуды от  $V-V_{\text{опор}}$ , где  $V_{\text{опор}}$  – частота, установленная на шкале "частота Гц" строботакметра (см. описание прибора). Нужно стараться, чтобы опорная частота была по возможности ближе к резонансной, хотя небольшое отличие допустимо. При построении этой кривой следует помнить, что применяемый метод позволяет найти только абсолютное значение разности частот, но не ее знак, и не перепутать две ветви кривой по разные стороны от максимума. По резонансной кривой следует ещё раз найти  $Q$ ,  $\lambda$  и  $\beta$ .

Резонансная кривая нашего осциллятора не вполне симметрична, это вызвано отклонением его свойств от свойств идеальной линейной системы: вынуждающая сила является функцией не только времени, но и смещения  $X$ . Для уменьшения этого эффекта магнит следует располагать вблизи от зажатого конца стержня, где амплитуда мала. По этой же причине зазор между стержнем и полюсом магнита следует делать по возможности большим, и для увеличения амплитуды колебаний подавать на магнит возможно более высокое напряжение от генератора. Асимметрия резонансной кривой могла бы дать ошибку в расчете добротности, если бы  $Q$  вычислялось по формуле (23). При расчете же по формуле (24) ошибка невелика.

**4. Изучение свободных колебаний.** Для получения свободных затухающих колебаний можно просто отнести стержень на 3...4 мм из положения равновесия и отпустить его. Однако лучше возбудить с помощью магнита вынужденные колебания большой амплитуды (резонансные), а затем разомкнуть цепь магнита. При таком способе возбуждения не возникнет колебаний других форм, которые могут помешать измерениям.

Частоту свободных колебаний  $\nu_{\text{св}} = \omega_{\text{св}} / 2\pi$  измеряют с помощью строботакметра, Если бы колебания были незатухающими, то указатель при совпадении частот колебаний и вспышек казался бы неподвижным. При затухающих колебаниях такая неподвижность будет наблюдаться только, если вспышки лампы случайно совпадут с моментом прохождения вибратора через положение равновесия. В общем случае будет казаться, что указатель экспоненциально движется к положению равновесия. Это и будет признаком синхронизации. Пока синхронизация не достигнута, будет казаться, что указатель совершает затухающие колебания с частотой, равной разности между частотой вспышек и частотой  $\nu_{\text{св}}$ .

Для определения коэффициента затухания нужно измерить с помощью секундомера время, за которое амплитуда колебаний уменьшится в 2...3 раза, и по формуле (10) подсчитать величину  $\beta$ . Практически для этого надо запустить и остановить секундомер в моменты, когда граница размытости полосы, отмечающей амплитуду, проходит через какие-либо заранее выбранные деления шкалы микроскопа.

Можно также измерить амплитуду двух последовательных отклонений при кажущихся колебаниях указателя, освещенного стробоскопически с частотой, отличающейся на 0.5...1 Гц от  $\nu_{св}$ ; отдельно нужно измерить период этих кажущихся колебаний. Ввиду трудности измерения затуханий (колебания затухают очень быстро), следует многократно провести измерения как первым, так и вторым методом.

**Из изучения свободных колебаний следует определить;**

- частоту свободных колебаний  $\omega_{св}$  (непосредственно измеряется),
- коэффициент затухания  $\beta$  (формула (10)),
- собственную частоту  $\omega_0$  (формула (9)),
- логарифмический декремент  $\lambda$  (формула (12)),
- добротность  $Q$ ,
- коэффициент возвращающей силы  $k$  (формула (5)),
- коэффициент трения  $r$  (формула (8)).

Результаты всех измерений и вычислений следует свести в таблицу (прочеркнутые клетки не заполняются).

Величина \ Метод	$\omega_{св}$	$\omega_0$	$\omega_{рез}$	$\beta$	$\lambda$	$Q$	$k$	$r$	$E$
Статический	—		—	—	—	—		—	
Вынужденные колебания	—								
Свободные колебания			—						
Среднее									

В последний столбец таблицы следует занести значение модуля Юнга, вычисленное по формуле (25) из величин коэффициента возвращающей силы  $k$ , определенного различными методами. Все эти методы применяются на практике для измерения модуля Юнга различных

материалов. Какой из них является наиболее точным? Что является основным источником ошибок в каждом случае?

## Контрольные вопросы

1. Постройте векторную диаграмму для вынужденных колебаний и вычислите амплитуду и сдвиг фаз между смещением  $x$  и силой  $F$ .

2. Нарисуйте резонансную кривую и опишите физические процессы, соответствующие каждому из характерных участков этой кривой.

5. Определите физический смысл и методы измерения коэффициента затухания, логарифмического декремента и добротности колебательной системы из наблюдений свободных и вынужденных колебаний.

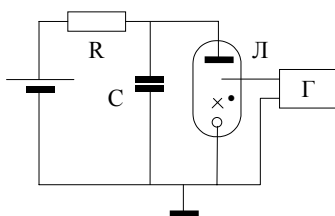
4. Что показывает фаза вынужденных колебаний?

5. В чём состоит дифференциальный метод измерения частоты?

## Приложение

### Строботахометр СТ-МЭИ

Основное назначение строботахометра – бесконтактное измерение скоростей вращения валов двигателей и других механизмов. Устройство тахометра схематически показано на **Рис.8**. Конденсатор  $C$  подключен к источнику постоянного напряжения через сопротивление



**Рис.8**

Параллельно конденсатору включена импульсная газоразрядная лампа  $L$ . Напряжение источника недостаточно для ионизации газа в лампе, так что лампа не проводит ток до тех пор, пока на ее поджигающий электрод не будет подано напряжение от генератора поджигающих импульсов. Но когда газ в лампе уже ионизован, лампа продолжает проводить ток и после прекращения поджигающего импульса, при этом возбужденные атомы газа (ксенона) излучают свет. По мере разряда конденсатора  $C$  напряжение на лампе постепенно снижается (сопротивление  $R$  настолько велико, что практически весь ток через лампу течет за счет разряда конденсатора). Через весьма короткий промежуток времени после начала разряда напряжение падает до такой величины, что уже не может поддерживать ионизацию газа, и лампа гаснет. Затем, пока лампа не горит, конденсатор вновь заряжается до напряжения источника. Следующий поджигающий импульс вновь вызывает вспышку лампы и т.д. Частота вспышек определяется частотой следования поджигающих импульсов.

Частота вспышек регулируется ручкой "ДИАПАЗОНЫ" (переключатель на 5 положений) и ручкой плавной застройки (эта ручка двойная, допускающая как грубое, так и более плавное вращение). Отсчет частоты ведется по шкале, градуированной в оборотах в минуту (об/мин). Прибор имеет три диапазона:

- 1) 500 – 1200 об/мин (5 – 20 Гц),
- 2) 1200 – 6000 об/мин (20 – 100 Гц),
- 3) 6000 – 50 000 об/мин (100 – 500 Гц).

**Реионт строботачометра крайне затруднен из-за дефицита запасных частей (электровакуумных ламп). Поэтому во избежание порчи прибора необходимо строго соблюдать указанные ниже правила включения.**

При включении тахометра в сеть нужно иметь в виду, что в его схему входит тиратрон (газоразрядный триод), для которого опасно как слишком высокое, так и слишком низкое напряжение. Поэтому перед включением необходимо проверить, в какое гнездо на задней стороне прибора включен предохранитель – он должен быть ввинчен в гнездо, соответствующее номинальному значению напряжения питающей сети (220 В), Если это не так – обратитесь к преподавателю или лаборанту.

Перед включением в сеть убедитесь, что переключатель, расположенный с левой стороны передней панели, стоит в положении "Выкл.". При включении прибора нужно сначала перевести этот переключатель в положение "СЕТЬ", при этом загорятся сигнальная лампа и лампы освещения шкалы. Затем **прибор должен прогреваться не менее 3 мин.** и только после этого можно повернуть переключатель в следующее положение – "ЛАМПА" (в противном случае тиратрон выйдет из строя).

Держать лампу включенной без надобности не следует, при коротких перерывах в работе нужно переводить выключатель в положение "СЕТЬ", а при длительных – совсем выключать прибор.

Включив тахометр, следует проверить калибровку генератора импульсов. Для этой цели тахометр снабжен вибратором, колеблющимся с удвоенной частотой сети (100 Гц). Осветив вибратор лампой тахометра, нужно установить стрелку в положение "1000 об/мин", если калибруется шкала первого диапазона, "5000 об/мин" – для второго диапазона и "12000 об/мин" – для третьего диапазона. При этом вибратор должен казаться неподвижным (при 12000 об/мин должны быть видны два неподвижных изображения). Если этого не наблюдается, следует подстроить генератор (только в присутствии лаборанта!), вращая отверткой винты, расположенные в отверстиях на передней панели прибора,

**Погрешность градуировки шкалы тахометра не превышает 1% от измеряемой частоты.**