

Санкт-Петербургский государственный университет

Физический факультет

*В.Ю. Карасев, Е.С. Дзлиева, И.Ч. Машек, А.И. Эйхвальд*

## **ДВИЖЕНИЕ И ДРЕЙФ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ**

Учебно-методическое пособие  
для студентов физического факультета

Санкт-Петербург  
2005

АВТОРЫ: В.Ю. Карасев, Е.С. Дзлиева, И.Ч. Машек, А.И. Эйхвальд,  
РЕЦЕНЗЕНТ: доц. И.Р. Крылов

Пособие посвящено вопросам, связанным с описанием движения заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. Предназначено студентам 1 и 2 курсов (части 1 и 2) при изучении соответствующих разделов курса общей физики (механики и электричества), а также студентам старших курсов (часть 3), знакомящихся с физикой пылевой плазмы.

## Оглавление

Предисловие. . . . .	2
ЧАСТЬ I. Примеры интегрирования уравнений движения заряженных нерелятивистских частиц . . . . .	2
Введение . . . . .	2
Движение заряженной частицы в постоянном электрическом поле . . . . .	3
Интегрирование уравнений движения в случае переменного электрического поля с синусоидальной зависимостью от времени . . . . .	4
Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле . . . . .	5
Дополнение . . . . .	7
ЧАСТЬ II. Дрейфовые движения заряженных частиц в постоянных полях . . . . .	7
Дрейф в однородных полях $\vec{E}$ и $\vec{B}$ . . . . .	7
Гравитационное поле, общее выражение для скорости дрейфа . . . . .	9
Неоднородное магнитное поле. Градиентный дрейф . . . . .	10
Неоднородное магнитное поле. Центробежный дрейф. . . . .	12
Движение в продольно неоднородном магнитном поле (магнитное зеркало). . . . .	14
Неоднородное электрическое поле . . . . .	16
ЧАСТЬ III. Силы, действующие на уединенную макрочастицу (пылевую частицу) . . . . .	18
Силы, не связанные с наличием у частицы электрического заряда . . . . .	18
Силы, связанные с наличием у частицы электрического заряда . . . . .	19
Электростатическая сила . . . . .	19
Сила ионного увлечения . . . . .	20
О силе взаимодействия между пылевыми частицами . . . . .	22
Литература . . . . .	23

Предисловие.

Данное пособие посвящено некоторым вопросам движения заряженных частиц: как микрочастиц (при классическом описании), так и макрочастиц - частиц заряженных до  $10^3$ - $10^6$  элементарных зарядов, имеющих размер  $10^{-2}$ - $10^2$  мкм (пылевых частиц). Изучение особенностей движения последних как в космической плазме, так и в лабораторных установках и технологических процессах началось лишь в последнее десятилетие. Пособие разделено на три части.

*Первая часть* адресована студентам первого курса, в ней рассмотрены простые задачи нерелятивистской динамики, с которыми студенты сталкиваются в курсе общей физики (механики) при интегрировании уравнений движения. По этой причине математические выкладки максимально подробны.

*Вторая часть* содержит задачи о движении заряженных частиц при различных конфигурациях электрического и магнитного полей. Обсуждаются дрейфовые движения частиц. Эти задачи сегодня являются неотъемлемой частью курса общей физики, как электричества, так и механики. Они также полезны при изучении физики плазмы и магнитогидродинамики.

*В третьей части* обсуждаются силы, действующие на пылевые частицы. Особенностью пылевых частиц в плазме является их не малые по масштабам микромира заряд, масса и размер. Кроме того, заряды частиц флуктуируют, а сами частицы являются стоками (местом рекомбинации) электронов и ионов. Потоки микрочастиц, в первую очередь ионов, идущие на пылинки приводят к появлению новых типов сил, действующих на заряженные пылевые макрочастицы. Это силы увлечения, термофоретические, а также трения и давления света. Эта часть пособия ориентирована в первую очередь на студентов старших и средних курсов, знакомящихся с физикой пылевой плазмы.

ЧАСТЬ I. Примеры интегрирования уравнений движения для заряженных нерелятивистских частиц.

Введение. *Механическое состояние* материальной точки описывается двумя векторными величинами  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$ , или шестью скалярными  $x, y, z, v_x, v_y, v_z$  в зависимости от времени  $t$ . Задача их отыскания по действующей на точку силе  $\vec{F}(t)$  называется *обратной задачей динамики*. Уравнение движения в классической физике представляет собой второй закон Ньютона  $m\vec{a} = \vec{F}$ . С точки зрения математики это дифференциальное уравнение второго порядка, которое решается интегрированием. Для решения необходимы начальные условия, в данном случае их два. Например, скорость  $\vec{v}_0$  и радиус вектор  $\vec{r}_0$  в начальный момент времени, что обычно записывается

следующим образом:  $\vec{v} \Big|_{t=0} = \vec{v}_0, \quad \vec{r} \Big|_{t=0} = \vec{r}_0.$

Обратная задача динамики решается вне зависимости от конкретного вида силы, которая может зависеть от времени, скорости и координаты  $\vec{F}(t, v, r)$ . На заряженную

частицу действуют электрическая и магнитная силы, определяемые электрическим полем,  $\vec{E}$  - его напряженность, и магнитным полем,  $\vec{B}$  - его индукция. В системе СИ  $E$  измеряется в  $[\frac{B}{M}]$ , а  $B$  в [Тл] ( $1\text{Тл} = 10^4 \text{ Гс}$ ). Часто рассматриваются пробные частицы с зарядом  $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл и электроны с зарядом  $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, называемым элементарным.

На простом примере движения пробной заряженной частицы в постоянном электрическом поле проведем интегрирование уравнения движения. Пусть нам даны заряд частицы  $e$ , ее масса  $m$ , постоянное поле  $\vec{E}$ , а также начальные условия: при  $t = 0$  скорость и радиус вектор  $\vec{v}_0$  и  $\vec{r}_0$ . Нужно определить  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$ , или  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$ ,  $v_z(t)$ . Запишем уравнение движения

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \quad (1.1)$$

Сила определяется электрическим полем  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Перепишем уравнение  $d\vec{v} = \frac{q\vec{E}}{m} dt$ . Уравнение решается интегрированием его правой и левой части, постоянные величины можно вынести за знак интеграла  $\vec{v}(t) = \frac{q\vec{E}}{m} \int dt$ . В результате интегрирования мы снова получим верное равенство  $\vec{v}(t) = \frac{q\vec{E}}{m} t + \vec{C}_1$ . Поскольку используемый нами неопределенный интеграл определяется с точностью до постоянной, то постоянная, в которой мы учтем постоянные левой и правой частей уравнения, обозначена  $\vec{C}_1$ . Ее значение определяется начальным условием, очевидно  $\vec{C}_1 = \vec{v}_0$ . Полученное выражение имеет вид:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{q\vec{E}}{m} t. \quad (1.2)$$

Из определения скорости следует соотношение  $d\vec{r} = \vec{v} dt$ , в которое подставим полученную зависимость скорости от времени:  $d\vec{r} = (\vec{v}_0 + \frac{q\vec{E}}{m} t) dt$ . При его интегрировании правую часть удобно разделить на два слагаемых

$$\vec{r} = \vec{v}_0 \int dt + \frac{q\vec{E}}{m} \int t dt = \vec{v}_0 t + \frac{q\vec{E}}{m} \frac{t^2}{2} + \vec{C}_2.$$

$\vec{C}_2$  - новая постоянная интегрирования, ее значение определяется условием  $\vec{r} = \vec{r}_0$  при  $t=0$ :  $\vec{C}_2 = \vec{r}_0$ . Окончательное выражение

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{q\vec{E}}{m} \frac{t^2}{2}. \quad (1.3)$$

Разумеется, выражения (1.2) и (1.3) получаются элементарно, как выражения при равноускоренном движении с ускорением  $\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{2m}$ .

Следующий пример – интегрирование уравнений движения в случае *переменного электрического поля* с синусоидальной зависимостью от времени. Пусть вектор напряженности электрического поля направлен вдоль оси  $ox$ , тогда  $E_x = E_{0x} \sin \omega t$ , а начальные условия  $v_x(t=0) = 0$  и  $x(t=0) = x_0$ . Тогда задача становится одномерной. Запишем уравнение движения

$$m \frac{dv_x}{dt} = qE_{0x} \sin \omega t.$$

Перепишем его так, чтобы выражения, зависящие от времени были в одной части, а зависящие от скорости в другой  $dv_x = \frac{qE_{0x}}{m} \sin \omega t dt$ . При интегрировании используем неопределенный интеграл

$$\int dv_x = \frac{qE_{0x}}{m} \int \sin \omega t dt.$$

Решаем уравнение

$$v_x(t) = \frac{qE_{0x}}{m} \cdot \frac{1}{\omega} \int \sin \omega t d(\omega t) = \frac{qE_{0x}}{\omega m} (-\cos \omega t) + C_1.$$

Используя начальное условие  $v_x(t=0) = 0$ , определим постоянную  $C_1 = \frac{qE_{0x}}{\omega m}$ . Тогда искомая скорость

$$v_x(t) = \frac{qE_{0x}}{\omega m} (1 - \cos \omega t). \quad (1.4)$$

Полученную зависимость полезно представить графически.

Для нахождения координаты, используя соотношение  $dx = v_x dt$ , составим уравнение

$$dx = \frac{qE_{0x}}{\omega m} (1 - \cos \omega t) dt.$$

При его интегрировании получается

$$x(t) = \frac{qE_{0x}}{\omega m} \left\{ \int dt - \int \cos \omega t dt \right\} = \frac{qE_{0x}}{\omega m} \left\{ t - \frac{1}{\omega} \int \cos \omega t d(\omega t) \right\}.$$

Чтобы свести подинтегральное выражение к стандартному, мы домножили и одновременно разделили интеграл на постоянную  $\omega$ , при этом множитель  $\omega$  внесли под дифференциал. Получилось выражение  $x(t) = \frac{qE_{0x}}{\omega m} \left\{ t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t + C_2 \right\}$ . Используя начальное условие  $x(t=0) = x_0$ , найдем что  $C_2 = x_0 \frac{\omega m}{qE_{0x}}$ . Окончательное выражение

имеет вид

$$x(t) = x_0 + \frac{qE_{0x}}{\omega m} t - \frac{qE_{0x}}{\omega^2 m} \sin \omega t. \quad (1.5)$$

Для анализа полученных решений  $v_x(t)$  и  $x(t)$  рекомендуем построить их графики, а также график ускорения  $a_x = \frac{qE_{0x}}{m} \sin \omega t$ , в зависимости от  $\omega t$ .

Теперь рассмотрим движение заряженной частицы в *однородном постоянном магнитном поле*, когда электрическое поле отсутствует. Сила, действующая на движущуюся заряженную частицу в этом случае – сила Лоренца  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Будем решать задачу в следующей геометрии, направим ось  $oz$  вдоль магнитного поля, рис.3. Распишем векторное произведение в выражении силы

$$\vec{v} \times \vec{B} = (v_y B_z - v_z B_y) \vec{i} + (v_z B_x - v_x B_z) \vec{j} + (v_x B_z - v_z B_x) \vec{k}.$$

Здесь  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы в направлении координатных осей. В геометрии задачи  $B_x = B_y = 0, B_z = B$ , тогда проекции векторного произведения таковы  $\vec{v} \times \vec{B}|_x = v_y B_z$ ,  $\vec{v} \times \vec{B}|_y = -v_x B_z$ ,  $\vec{v} \times \vec{B}|_z = 0$ . Векторное уравнение движения в данном случае эквивалентно трем скалярным

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = qv_y B_z \\ m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B_z \\ m \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Третье уравнение системы означает, что скорость частицы вдоль магнитного поля постоянна,  $v_z = const$ . Более того, сила Лоренца перпендикулярна скорости, а значит, не производит работы (в механике такие силы называются гироскопическими). Полная скорость частицы  $v$  не меняется. Можно показать, что в магнитном поле кинетическая энергия частицы сохраняется (ее производная по времени равна нулю).

$$\frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m}{2} (\vec{v}, \vec{v}) \right\} = \frac{m}{2} \left\{ (\dot{\vec{v}}, \vec{v}) + (\vec{v}, \dot{\vec{v}}) \right\} = \left( m \frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{v} \right) = (\vec{F}, \vec{v}) = 0.$$

Точками над символом обозначена производная по времени. Последнее скалярное произведение равно нулю, т.к. сила (сила Лоренца) перпендикулярна скорости. В итоге,  $\frac{mv^2}{2} = const$ , а значит  $v = const$ . Как результат оказывается, что скорость частицы в плоскости перпендикулярной магнитному полю тоже сохраняется  $v_{\perp} = const$ , хотя, из-за действия силы Лоренца, ее движение является ускоренным. Можно предположить, что движение частицы в этой плоскости – это движение по окружности. Его вид

$$\begin{cases} v_x = v_{\perp} \sin \omega t \\ v_y = v_{\perp} \cos \omega t \end{cases} \quad (1.7)$$

тут  $\omega$  – угловая скорость вращения по окружности. Продифференцируем по времени эту систему

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \omega v_{\perp} \cos \omega t \\ \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_{\perp} \sin \omega t \end{cases},$$

переписывая ее с учетом (1.7), получим:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \omega v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x \end{cases} \quad (1.8).$$

Для сравнения с (1.8) систему (1.6) можно представить так:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \frac{qB_z}{m} v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB_z}{m} v_x \end{cases} \quad (1.9).$$

Сравнивая (1.8) и (1.9) можно получить выражение для угловой скорости, или частоты вращения заряженной частицы в магнитном поле:

$$\omega = \frac{qB}{m} \text{ в СИ, или } \omega = \frac{qB}{cm} \text{ в СГС.} \quad (1.10),$$

Здесь  $c$  – скорость света. Частоту  $\omega$  называют циклотронной или гироскопической (Иногда  $\omega$  называют ларморовской, однако ларморовская частота определяется вдвое меньшей величиной).

Из (1.6) следует, что направление вращения частицы зависит от знака ее заряда. Для положительно заряженных частиц направления векторов угловой скорости и магнитного поля противоположны, для определения направления отклонения можно пользоваться правилом левой руки. Для отрицательно заряженных частиц направления векторов угловой скорости и магнитного поля совпадают.

Говоря о траектории частицы, укажем, что она представляет собой винтовую линию с постоянным шагом  $h$ ,  $h = v_z T = \frac{2\pi v_z}{\omega} = \frac{2\pi v_z m}{qB}$ . Радиус окружности вращения в плоскости  $xu$  - циклотронный, гироскопический или ларморовский - обозначим  $\rho$ . Определим его как

$$\rho = \frac{v_{\perp}}{\omega} = \frac{v_{\perp} m}{|q|B}. \quad (1.11)$$

Заметим, что частота  $\omega$  обратно пропорциональна, а радиус  $\rho$  прямо пропорционален массе частицы. По траектории в магнитном поле можно определять сорт частиц.

Мы определили траекторию движения частицы, не получив явно уравнение окружности. При интегрировании (1.7) получается следующее

$$\begin{cases} x(t) = x_0 - \rho \cos \omega t \\ y(t) = y_0 + \rho \sin \omega t \\ z(t) = z_0 + v_z t \end{cases} \quad (1.12)$$

*Пример.* Рассчитаем  $\omega$  и  $\rho$  электрона в магнитном поле Земли.

Масса электрона  $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$  кг, заряд  $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл, магнитное поле Земли  $B = 5 \cdot 10^{-5}$  Тл.

$$\omega = \frac{qB}{m} \approx \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-5}}{9.1 \cdot 10^{-31}} \text{ с}^{-1} \approx 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

При скорости электрона  $v = 10^5$  м/с (что соответствует тепловой скорости  $v_T$  при  $T = 300$  К)

$$\rho = \frac{v}{\omega} \approx \frac{10^5}{10^7} \text{ м} = 10^{-2} \text{ м} = 1 \text{ см}.$$

*Дополнение.* Заметим, что уравнения (1.6) можно решать, используя комплексное представление. Продифференцируем (1.6) по времени.

$$\begin{cases} \ddot{v}_x = \omega \dot{v}_y = -\omega^2 v_x \\ \ddot{v}_y = -\omega \dot{v}_x = -\omega^2 v_y \end{cases} \quad (1.13)$$

Решение уравнений (1.13) можно записать в виде:

$$v_{x,y} = v_{\perp} e^{\pm i\omega t + i\delta_{x,y}} \quad (1.14)$$

где  $\pm$  относятся к знаку заряда  $q$ ,  $i$  – мнимая единица. Фазу  $\delta$  можно выбрать так, чтобы

$$v_x = v_{\perp} e^{i\omega t} = \dot{x}. \quad (1.15a)$$

$$v_y = \frac{m}{qB} \dot{v}_x = \pm \frac{1}{\omega} \dot{v}_x = \pm i v_{\perp} e^{i\omega t} = \dot{y}. \quad (1.15b)$$

Интегрируя выражения (1.15a) и (1.15b), получим

$$\begin{cases} x - x_0 = -i \frac{v_{\perp}}{\omega} e^{i\omega t} \\ y - y_0 = \pm \frac{v_{\perp}}{\omega} e^{i\omega t} \end{cases} \quad (1.16)$$

Взяв вещественную часть уравнений (1.16), и с учетом  $\rho$  получим

$$\begin{cases} x - x_0 = \rho \sin \omega t \\ y - y_0 = \pm \rho \cos \omega t \end{cases} \quad (1.17)$$

Эти формулы описывают круговую орбиту вокруг фиксированного *ведущего центра*  $(x_0, y_0)$ . Форма записи (1.12) и (1.17) отличается из-за выбора  $\delta$ .

**ЧАСТЬ II.** Дрейфовые движения заряженных частиц в постоянных полях.

*Дрейф в однородных полях  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .* Если одновременно имеются электрическое и магнитное поля, тогда движение частицы будет суммой двух движений: обычного ларморовского вращения и дрейфа ведущего центра. Выберем направление поля  $\vec{E}$  таким образом, чтобы оно располагалось в плоскости  $xz$ , тогда  $E_y = 0$ .  $B = B_z$  и  $z$ -компонента скорости не связана с поперечными движениями, и ее можно рассматривать отдельно. Уравнение движения теперь принимает вид

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.1)$$

Записывая  $z$ -проекцию этого уравнения  $m \frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m} E_z$  находим

$$v_z = \frac{qE_z}{m} t + v_{z0}. \quad (2.2)$$

Это соотношение описывает движение с постоянным ускорением вдоль поля  $\vec{B}$ . Поперечные проекции уравнения (2.1) запишутся в виде

$$m \frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} E_x \pm \omega v_y, \quad m \frac{dv_y}{dt} = 0 \mp \omega v_x. \quad (2.3)$$

Дифференцируя их по времени, получаем (при постоянном  $\vec{E}$ ):

$$\ddot{v}_x = -\omega^2 v_x, \quad (2.4)$$

$$\ddot{v}_y = \mp \omega \left( \frac{q}{m} E_x \pm \omega v_y \right) = -\omega^2 \left( \frac{E_x}{B} + v_y \right).$$

Последнее уравнение можно переписать в виде  $\frac{d^2}{dt^2} \left( v_y + \frac{E_x}{B} \right) = -\omega^2 \left( v_y + \frac{E_x}{B} \right)$ .

Видно, что если во втором уравнении (2.4) заменить  $v_y + \frac{E_x}{B}$  на  $v_y$ , то оно сведется к последнему из уравнений (1.13). При этом уравнения (1.15) принимают вид

$$v_x = v_{\perp} e^{i\omega t}, \quad v_y = \pm i v_{\perp} e^{i\omega t} - \frac{E_x}{B}. \quad (2.5)$$

Ларморовское движение – такое же как и раньше, но на него при  $E_x > 0$  накладываеся дрейф ведущего центра  $\vec{v}_0$  в направлении  $y$  (рис.1).

Чтобы получить общую формулу для  $\vec{v}_0$ , нужно решить уравнение (2.1) в векторном виде. В этом уравнении член  $m \frac{d\vec{v}}{dt}$  можно опустить, поскольку он описывает круговое вращение с частотой  $\omega$ . Тогда уравнение (2.1) принимает вид

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0. \quad (2.6)$$

Умножая его векторно на  $\vec{B}$ , имеем

$$\vec{E} \times \vec{B} = \vec{B} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{v} B^2 - \vec{B} (\vec{v} \cdot \vec{B}). \quad (2.7)$$

Поперечные компоненты этого уравнения запишутся в виде

$$\vec{v}_{\perp 0} = \vec{E} \times \vec{B} / B^2 \equiv \vec{v}_E \quad (2.8)$$

Важно заметить, что  $\vec{v}_E$  не зависит от  $q$ ,  $m$  и  $v_{\perp}$ . Это очевидно из следующей физической картины. На первом полуобороте своей орбиты (рис.1) положительно заряженный ион получает энергию от электрического поля, увеличивается  $v_{\perp}$ , и, следовательно,  $\rho$ . На втором полуобороте ион теряет энергию, и  $\rho$  уменьшается. Эта

разница  $\rho$  на левой и правой частях орбиты и вызывает дрейф со скоростью  $v_E$ . Отрицательно заряженный ион вращается в противоположном направлении (рис.1), но и энергию от поля он получает при движении в направлении, противоположном тому, в котором движется ион. Следовательно, дрейф электрона происходит в том же направлении, что и дрейф иона. Из частиц, имеющих разные массы, но одинаковые скорости, у более легких будет меньший  $\rho$  и, следовательно, меньше дрейф за один оборот. Однако, у более легких частиц выше частота вращения, и два эффекта в точности компенсируют друг друга. Две частицы с одинаковыми массами, но с разными энергиями должны иметь одну и ту же частоту  $\omega$ . Более медленная заряженная частица будет иметь меньший  $\rho$  и поэтому за один оборот получит от электрического поля меньше энергии. Однако, для менее энергичных частиц относительное изменение в  $\rho$  при данном изменении энергии будет больше, и эти два эффекта также взаимно компенсируются.

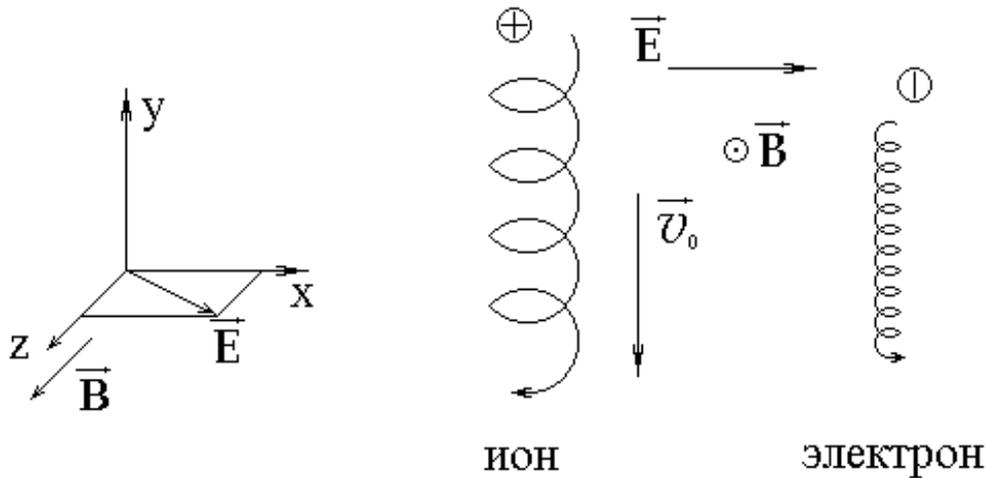


Рис.1

*Гравитационное поле.* Заменяя в уравнении движения (2.1) величину  $q\vec{E}$  на общее обозначение силы  $\vec{F}$ , можно применить полученный выше результат и к другим видам силы. Скорость дрейфа ведущего центра, вызванного силой  $\vec{F}$ , в общем случае равна

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{q} \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (2.9)$$

В частности, если  $\vec{F}$  - сила тяжести  $m\vec{g}$ , то скорость дрейфа

$$\vec{v}_g = \frac{m}{q} \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (2.10)$$

Этот вид дрейфа похож на дрейф в электрическом поле ( $\vec{v}_E$ ) тем, что его направление перпендикулярно как приложенной силе, так и вектору  $\vec{B}$ ; но он имеет и одно важное отличие: скорость  $\vec{v}_g$  меняет направление в зависимости от знака заряда частицы. Таким образом, под действием силы тяжести ионы и электроны дрейфуют в противоположных направлениях, что приводит к возникновению тока, плотность которого

$$\vec{j} = (M + m) \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (2.11)$$

Физически возникновение этого дрейфа (рис.2), как и рассмотренных ранее, объясняется тем, что при движении частицы меняется ларморовский радиус ее орбиты, поскольку она отдает или получает энергию от поля силы тяжести. Но теперь, хотя электроны и ионы вращаются в разные стороны, силы, действующие на них, направлены в одну сторону, поэтому дрейфуют эти частицы в противоположных направлениях. Величина  $\vec{v}_g$ , связанная с обычной силой тяжести, в большинстве случаев пренебрежимо мала, но если силовые линии магнитного поля изогнуты, то из-за наличия центробежной силы возникает эффективная сила тяжести, пренебречь которой уже *нельзя*. Эта сила не зависит от массы, поэтому мы и не упоминали, что в общем выражении (2.10) входит  $m$ . Отметим, что центробежная сила является причиной так называемой “гравитационной” неустойчивости плазмы, которая также с реальной гравитацией ничего общего не имеет.

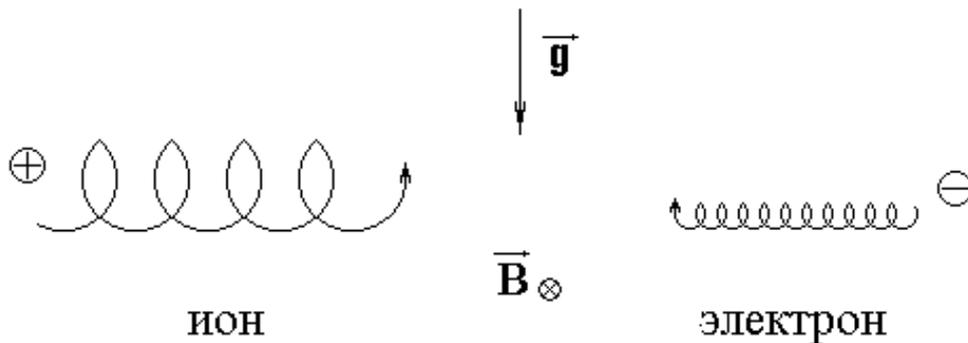


Рис.2

*Неоднородное поле  $\vec{B}$ .* Теперь, когда введено понятие о дрейфе ведущего центра, можно рассмотреть движение частиц в неоднородных полях, т.е. в полях  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , которые изменяются в пространстве. В случае однородных полей нам удалось получить точные выражения для скорости дрейфа ведущего центра, но как только мы вводим в задачу неоднородность, проблема становится слишком сложной для точного решения. Чтобы получить приближенный ответ, обычно проводят разложение по

малому отношению  $\rho/L$ , где  $L$  – масштаб неоднородности. Вычисления в рамках такой теории (она называется *теорией орбит*) могут быть сложными, поэтому мы рассмотрим лишь простейшие случаи, когда в системе существует неоднородность только одного вида.

*Градиентный дрейф*;  $\nabla B \perp \vec{B}$ . В данном разделе будем считать, что силовые линии магнитного поля представляют собой прямые, а их плотность возрастает в направлении  $y$  (рис.3). Пользуясь разработанной простой моделью, можно заранее предвидеть, как будут вести себя в таком поле заряженные частицы. Из-за наличия градиента поля  $|\vec{B}|$  ларморовский радиус в нижней части орбиты частицы будет больше, чем в верхней, а это должно приводить к дрейфу ионов и электронов в противоположных направлениях, перпендикулярных как  $\vec{B}$ , так и  $\nabla B$ . Очевидно, что величина скорости дрейфа должна быть пропорциональна  $\rho/L$  и  $v_{\perp}$ .

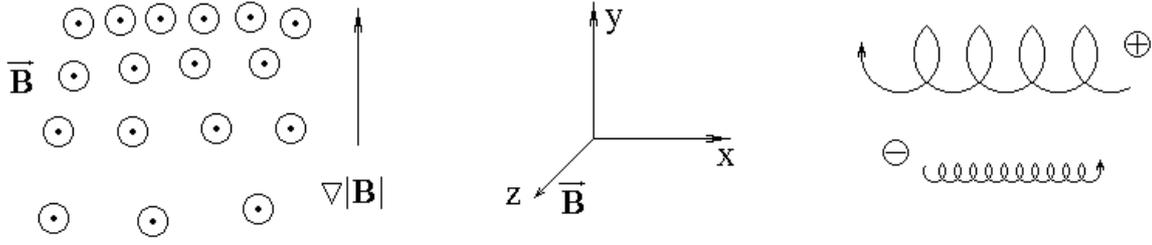


Рис.3

Для вычисления скорости дрейфа рассмотрим силу Лоренца  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ , усредненную по периоду вращения частицы. Ясно, что  $\vec{F}_x = 0$ , поскольку частица движется вверх столько же времени, сколько и вниз. Теперь приближенно вычислим  $\vec{F}_y$ , используя усреднение по *невозмущенной орбите* частицы. Невозмущенная орбита в постоянном магнитном поле  $\vec{B}$  описывается уравнениями (1.15) и (1.17). Взяв вещественную часть уравнения (1.15б), получаем

$$F_y = -qv_x B_z(y) = -qv_{\perp} (\cos \omega t) \left[ B_0 \pm \rho (\cos \omega t) \frac{\partial B}{\partial y} \right] \quad (2.12)$$

Здесь мы разложили поле  $\vec{B}$  в ряд Тейлора вблизи точки  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  и воспользовались выражениями (1.17):

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{B} + \dots, \quad B_z = B_0 + y \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) + \dots \quad (2.13)$$

Такое разложение, конечно, можно провести только в том случае, если выполняется неравенство  $\rho/L \ll 1$ , где  $L$  – масштаб изменения  $\frac{\partial B_z}{\partial y}$ . Первый член в уравнении (2.12) после усреднения по периоду вращения дает нуль, а среднее от  $\cos^2 \omega t$  равно  $\frac{1}{2}$ , так что

$$\bar{F}_y = \mp q v_{\perp} \rho \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B}{\partial y} \right). \quad (2.14)$$

При этом скорость дрейфа ведущего центра дается выражением

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{q} \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2} = \frac{1}{q} \frac{\bar{F}_y}{|B|} \vec{i} = \mp \frac{v_{\perp} \rho}{B} \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial y} \vec{i}, \quad (2.15)$$

при выводе которого мы использовали формулу (2.9). Поскольку выбор оси  $y$  был произволен, последнее соотношение можно обобщить

$$\vec{v}_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} \rho \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2}. \quad (2.16)$$

Данная формула включает все зависимости, которые мы предвидели, исходя из физической картины процесса; не был предсказан только множитель  $\frac{1}{2}$ , возникший из-за усреднения. Заметим, что знаки  $\pm$  соответствуют знаку заряда, а  $B$  отвечает  $|B|$ . Величина  $\vec{v}_{\nabla B}$  называется скоростью *градиентного дрейфа*. Дрейф имеет противоположные направления для ионов и электронов и создает ток, перпендикулярный  $\vec{B}$ . Заметим также, что полученное выражение для скорости дрейфа является приближенным; для точного вычисления  $\vec{v}_{\nabla B}$  нужно при усреднении пользоваться точной орбитой частицы с учетом дрейфа.

*Центробежный дрейф; искривленные силовые линии поля  $B$ .* Предположим, что силовые линии магнитного поля изогнуты и имеют постоянный радиус кривизны  $R_c$ , а  $|\vec{B}| = \text{const}$  (рис.4). Такое поле не удовлетворяет в вакууме уравнениям Максвелла, поэтому на практике к изучаемому здесь эффекту всегда будет добавляться градиентный дрейф. В рассматриваемом же случае дрейф ведущего центра возникает из-за центробежной силы, действующей на частицы, перемещающиеся вдоль силовых линий вследствие теплового движения. Пусть  $v_{\parallel}^2$  обозначает средний квадрат скорости хаотического движения вдоль  $\vec{B}$ , тогда средняя центробежная сила

$$\vec{F}_{cf} = \frac{m v_{\parallel}^2}{R_c} \hat{r} = m v_{\parallel}^2 \frac{\vec{R}_c}{R_c^2} \quad (2.17)$$

В соответствии с соотношением (2.9) она приводит к дрейфу

$$\vec{v}_R = \frac{1}{q} \frac{\vec{F}_{cf} \times \vec{B}}{B^2} = \frac{m v_{\parallel}^2}{q B^2} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2} \quad (2.18)$$

Дрейф со скоростью  $\vec{v}_R$  называется *центробежным дрейфом*.

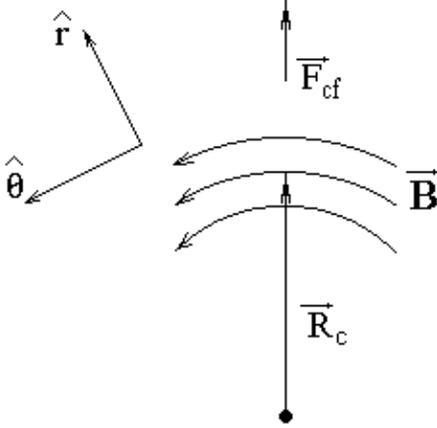


Рис.4

Вычислим скорость градиентного дрейфа, который сопровождает дрейф со скоростью  $\vec{v}_R$ , если принять во внимание уменьшение  $|\vec{B}|$  с радиусом. Обратимся к рис.4. Как известно, в вакууме  $\nabla \times \vec{B} = 0$ . В цилиндрических координатах, показанных на рисунке,  $\nabla \times \vec{B}$  имеет только  $z$ -компоненту, поскольку  $\vec{B}$  имеет лишь  $\theta$ -компоненту, а  $\nabla B$  - лишь  $r$ -компоненту. В этом случае

$$\left(\nabla \times \vec{B}\right)_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_\theta) = 0, \quad B_\theta \sim \frac{1}{r} \quad (2.19)$$

Таким образом,

$$|\vec{B}| \sim \frac{1}{R_c}, \quad \frac{\nabla |\vec{B}|}{|\vec{B}|} = -\frac{\vec{R}_c}{R_c^2}. \quad (2.20)$$

Используя уравнение (2.16), получаем

$$v_{\nabla B} = \mp \frac{1}{2} \frac{v_\perp \rho}{B^2} \vec{B} \times |\vec{B}| \frac{\vec{R}_c}{R_c^2} = \pm \frac{1}{2} \frac{v_\perp^2}{\omega} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B} = \frac{1}{2} \frac{m}{q} v_\perp^2 \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B} \quad (2.21)$$

Прибавляя скорость дрейфа  $\vec{v}_{\nabla B}$  к  $\vec{v}_R$ , получаем общее выражение для дрейфа частицы в магнитном поле с изогнутыми силовыми линиями:

$$\vec{v}_{\nabla B} + \vec{v}_R = \frac{m}{q} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B} \left( v_\parallel^2 + \frac{1}{2} v_\perp^2 \right) \quad (2.22)$$

В случае максвелловского распределения  $\overline{v_\parallel^2} = \left(\frac{1}{2}\right) \overline{v_\perp^2} = \frac{kT}{m}$ , поскольку  $v_\perp$

отвечают две степени свободы. В этом случае можно выразить среднюю скорость дрейфа в поле с искривленными силовыми линиями через тепловую скорость

$$\bar{v}_{R+\nabla B} = \pm \frac{v_{\text{тепл}}^2}{R_c \omega_c} \hat{y} = \frac{\pm \bar{\rho}}{R_c} v_{\text{тепл}} \hat{y}, \quad (2.23)$$

где  $\hat{y}$  - единичный вектор в направлении  $\vec{R}_c \times \vec{B}$ . Отсюда следует, что  $\bar{v}_{R+\nabla B}$  зависит от заряда ионов, но не от их массы.

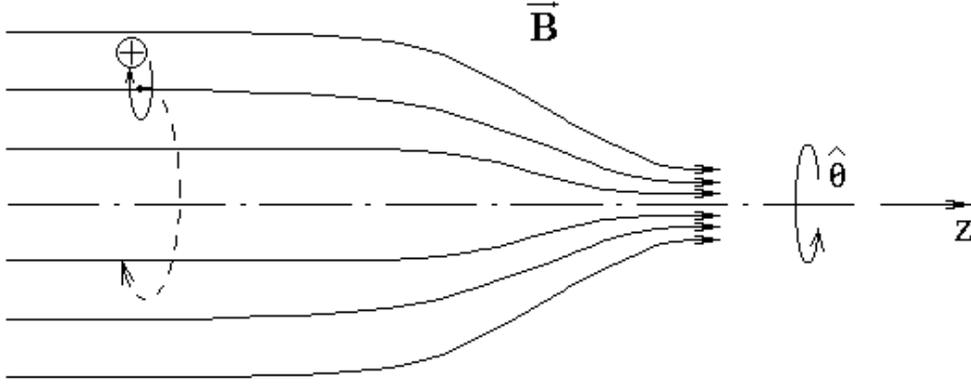


Рис.5

*Движение в продольно неоднородном магнитном поле (магнитное зеркало).* Рассмотрим теперь магнитное поле, направленное в основном вдоль оси  $z$ . Пусть поле осесимметричное,  $B_\theta = 0$ ,  $\partial/\partial\theta = 0$ , а напряженность его зависит от  $z$ . Поскольку силовые линии такого поля сходятся и расходятся, должна существовать компонента  $B_r$  (рис.5). Покажем, что при такой конфигурации системы возникает сила, которая может запереть частицу в магнитном поле. Найдем компоненту  $B_r$  из условия  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Если  $\frac{\partial B_z}{\partial z}$  задана при  $r = 0$  и не очень сильно меняется с  $r$ , то мы можем приближенно считать, что

$$r B_r = - \int_0^r r \frac{\partial B_z}{\partial z} dr \approx - \frac{1}{2} r^2 \left[ \frac{\partial B_z}{\partial z} \right]_{r=0},$$

$$B_r = - \frac{1}{2} r \left[ \frac{\partial B_z}{\partial z} \right]_{r=0}. \quad (2.24)$$

Изменение величины  $|\vec{B}|$  с  $r$  вызывает градиентный дрейф ведущих центров вдоль оси симметрии, однако, радиальный градиентный дрейф отсутствует, поскольку  $\frac{\partial B}{\partial \theta} = 0$ .

Выпишем компоненты силы Лоренца:

$$\begin{aligned}
F_r &= q(v_\theta B_z - v_z B_\theta), \\
F_\theta &= q(-v_r B_z + v_z B_r), \\
F_z &= q(v_r B_\theta - v_\theta B_r).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Проанализируем эти выражения. Если  $B_\theta = 0$ , то в первом выражении обращается в нуль второй член, а в третьем – первый. Первые члены в первом и втором выражениях описывают обычное ларморовское вращение. Второй член во втором выражении обращается в нуль на оси  $z$ ; в тех точках, где он не обращается в нуль, он представляет собой азимутальную составляющую силы Лоренца, вызывающую дрейф ведущих центров в радиальном направлении. Этот дрейф приводит к тому, что ведущие центры движутся вдоль искривленных силовых линий. Рассмотрим, наконец, последний член в третьем выражении (2.25). С учетом соотношений (2.24)  $F_z$  можно записать как

$$F_z = \left(\frac{1}{2}\right) q v_\theta r \left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right) \tag{2.26}$$

Усредним теперь это выражение по периоду вращения. Для простоты рассмотрим частицу, ведущий центр которой лежит на оси системы. В этом случае  $v_\theta$  при вращении остается постоянной; в зависимости от знака заряда мы имеем  $v_\theta = \mp v_\perp$ .

Поскольку  $r = \rho$ , средняя сила, действующая на частицу, равна

$$\bar{F}_z = \mp \frac{1}{2} q v_\perp \rho \frac{\partial B_z}{\partial z} = \mp \frac{1}{2} q \frac{v_\perp^2}{\omega} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{m v_\perp^2}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z}. \tag{2.27}$$

Определим *магнитный момент* вращающейся частицы как

$$\mu \equiv \frac{m v_\perp^2}{2B}. \tag{2.28}$$

Следовательно, на частицу действует сила

$$\bar{F}_z = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z}. \tag{2.29}$$

В общем случае ее можно записать в следующем виде:

$$F_{\parallel} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s}. \tag{2.30}$$

Здесь  $ds$  - элемент дуги вдоль направления  $\vec{B}$ . Заметим, что определение (2.28) совпадает с обычным определением момента петли с током  $I$  площадью  $A$ :  $\mu = IA$ . В случае однократно заряженного иона ток  $I$  возбуждается зарядом  $e$ , совершающим

$\frac{\omega}{2\pi}$  оборотов в секунду:  $I = \frac{e\omega}{2\pi}$ . Площадь  $A$  равна  $\pi r^2 = \frac{\pi v_\perp^2}{\omega^2}$ . Таким образом,

$$\mu = \frac{\pi v_\perp^2}{\omega^2} \frac{e\omega}{2\pi} = \frac{1}{2} \frac{v_\perp^2 e}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{m v_\perp^2}{B}.$$

При движении частицы в неоднородном поле  $\vec{B}$  ларморовский радиус ее орбиты изменяется, но  $\mu$  остается инвариантным. Чтобы доказать это, рассмотрим проекцию уравнения движения на направление  $\vec{B}$ :

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s}. \quad (2.31)$$

Умножая это уравнение слева на  $v_{\parallel}$ , а справа на равную ей величину  $ds/dt$ , получаем

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \right) = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \frac{ds}{dt} = -\mu \frac{dB}{dt}. \quad (2.32)$$

Здесь  $dB/dt$ - это изменение величины  $B$ , которое “видит” частица; само поле  $B$  постоянно. Поскольку энергия частицы должна сохраняться, мы имеем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \mu B \right) = 0. \quad (2.33)$$

С учетом соотношения (2.32) условие (2.33) принимает вид

$$-\mu \frac{dB}{dt} + \frac{d}{dt} (\mu B) = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{d\mu}{dt} = 0. \quad (2.34)$$

На инвариантности магнитного момента основан один из методов удержания заряженных частиц – магнитное зеркало. Пусть вследствие теплового движения частица перемещается из области слабого поля в область, где оно сильнее. Для того чтобы сохранялся  $\mu$ , поперечная скорость тоже должна увеличиваться. Поскольку полная энергия частицы постоянна, продольная скорость должна уменьшиться. Если поле  $B$  достаточно велико, то продольная скорость обратится в ноль, и частица “отразится” назад в область более слабого поля. К такому отражению приводит существование силы  $\vec{F}_{\parallel}$ . Заметим, что этот механизм работает как для электронов, так и для ионов.

*Неоднородное поле  $\vec{E}$ .* Пусть теперь магнитное поле в системе однородно, а электрическое – неоднородно. Для простоты предположим, что  $\vec{E}$  направлено по оси  $x$  и меняется с  $x$  синусоидально.

$$\vec{E} \equiv E_0 (\cos kx) \vec{i}. \quad (2.35)$$

Это распределение поля с длиной волны  $\lambda = 2\pi/k$  создается синусоидальным распределением заряда, на анализе которого мы останавливаться не будем. На практике такое распределение заряда может возникнуть в плазме во время распространения в ней волны. Уравнение движения частицы в поле  $\vec{E}(x)$  имеет вид

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q [\vec{E}(x) + \vec{v} \times \vec{B}]; \quad (2.36)$$

поперечные составляющие этого уравнения запишутся следующим образом:

$$\dot{v}_x = \frac{qB}{m} v_y + \frac{q}{m} E_x(x), \quad \dot{v}_y = \frac{qB}{m} v_x, \quad (2.37)$$

$$\ddot{v}_x = -\omega^2 v_x \pm \omega^2 \frac{\dot{E}_x}{B}, \quad (2.38)$$

$$\ddot{v}_y = -\omega^2 v_y - \omega^2 \frac{E_x(x)}{B}. \quad (2.39)$$

Здесь  $E_x(x)$  – электрическое поле в точке, где находится частица. Чтобы вычислить его, нам нужно знать траекторию частицы, которую мы и пытаемся в первую очередь найти. Если электрическое поле слабое, то для приближенного вычисления  $E_x(x)$  мы можем использовать невозмущенную орбиту, т.е. орбиту частицы в отсутствие поля  $E$ . Она определяется выражением (1.17):

$$x = x_o + \rho \sin \omega t. \quad (2.40)$$

Из уравнений (2.39) и (2.35) получаем

$$\ddot{v}_y = -\omega^2 v_y - \omega^2 \frac{E_o}{B} \cos k(x_o + \rho \sin \omega t). \quad (2.41)$$

Предугадывая результат, будем искать решение в виде суперпозиции вращения с частотой  $\omega$  и дрейфа с постоянной скоростью  $v_E$ . Поскольку нас интересует только выражение для  $v_E$ , избавимся от членов, описывающих вращение, путем усреднения по периоду. Из уравнения (2.38) тогда следует, что  $\bar{v}_x = 0$ . В уравнении (2.41) осциллирующий член  $\ddot{v}_y$ , очевидно, тоже при усреднении обращается в нуль, и мы получаем

$$\ddot{v}_y = 0 = -\omega^2 \bar{v}_y - \omega^2 \frac{E_o}{B} \overline{\cos k(x_o + \rho \sin \omega t)}. \quad (2.42)$$

Преобразовывая косинус, имеем

$$\cos k(x_o + \rho \sin \omega t) = \cos(kx_o) \cos(k\rho \sin \omega t) - \sin(kx_o) \sin(k\rho \sin \omega t) \quad (2.43)$$

Достаточно рассмотреть случай малого ларморовского радиуса,  $k\rho \ll 1$ . Разложения в ряды Тейлора

$$\cos \varepsilon = 1 - (1/2) \varepsilon^2 + \dots, \quad \sin \varepsilon = \varepsilon + \dots \quad (2.44)$$

позволяют записать следующее соотношение:

$$\cos k(x_o + \rho \sin \omega t) \approx \cos(kx_o) \left( 1 - \frac{1}{2} k^2 \rho^2 \sin^2 \omega t \right) - (\sin kx_o) k\rho \sin \omega t$$

Последний член при усреднении во времени исчезает, и уравнение (2.45) принимает вид

$$\bar{v}_y = -\frac{E_o}{B} \cos(kx_o) \left( 1 - \frac{1}{4} k^2 \rho^2 \right) = \frac{E_x(x_o)}{B} \left( 1 - \frac{1}{4} k^2 \rho^2 \right) \quad (2.46)$$

Следовательно, в неоднородном поле обычный  $\vec{E} \times \vec{B}$  - дрейф изменяется таким образом, что его скорость принимает вид

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \left( 1 - \frac{1}{4} k^2 \rho^2 \right). \quad (2.47)$$

Нетрудно понять физическую причину этого изменения. Дело в том, что ион, ведущий центр которого расположен в точке максимума поля, в действительности большую часть времени проводит в областях, где  $\vec{E}$  слабее. Следовательно, средняя скорость его дрейфа будет меньше, чем скорость  $v_E$ , рассчитанная по полю в точке, где

расположен ведущий центр. В линейно меняющемся поле  $\vec{E}$  ион на одной стороне своей орбиты должен находиться в более сильном поле, а на другой стороне – в настолько же более слабом, и поправки к  $\vec{v}_E$  должны компенсировать друг друга. Из этого ясно, что поправочный член зависит от *второй производной поля*  $\vec{E}$ . У синусоидального распределения, которое мы рассматривали, вторая производная по отношению к  $\vec{E}$  всегда имеет противоположный знак, что и объясняет “минус” в формуле (2.47). Чтобы обобщить эту формулу на случай произвольного распределения поля  $\vec{E}$ , нам достаточно лишь заменить  $k$  на  $-i\nabla$  и записать ее в виде

$$\vec{v}_E = \left(1 + \frac{1}{4}\rho^2\nabla^2\right) \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (2.48)$$

Второй член в скобках описывает *эффект, связанный с конечной величиной ларморовского радиуса* частицы. Поскольку для ионов  $\rho$  гораздо больше, чем для электронов,  $\vec{v}_E$  теперь зависит от вида частиц. Например, если в плазме возник сгусток плотности, тогда электрическое поле  $\vec{E}$  может вызвать разделение ионов и электронов, поскольку они дрейфуют с разными скоростями; это приведет к появлению нового электрического поля. Если существует механизм обратной связи, позволяющий вторичному электрическому полю усиливать первичное, то  $\vec{E}$  будет расти до бесконечности и плазма станет неустойчивой. Такая неустойчивость называется *дрейфовой*. Градиентный дрейф также связан с конечностью величины ларморовского радиуса и тоже вызывает разделение зарядов, однако, согласно (2.16), скорость  $\vec{v}_{\nabla B}$  пропорциональна  $k\rho$ , а поправочный член в соотношении (2.47) пропорционален  $k^2\rho^2$ . Следовательно, неоднородность поля  $\vec{E}$  играет важную роль при относительно больших  $k$ , или малых масштабах неоднородности.

### ЧАСТЬ III. Силы, действующие на уединенную макрочастицу (пылевую частицу)

Основные силы, действующие на частицу, делятся на силы, не связанные с наличием у нее электрического заряда (гравитационная сила, сила торможения нейтральными частицами, термофоретическая сила и др.), и на силы, связанные с наличием у частицы электрического заряда (электрическая сила и сила увлечения ионами). Ниже рассматриваются выражения для некоторых сил, действующих на уединенную заряженную сферическую пылевую частицу радиуса  $a$ . Формулы приведены в гауссовой системе.

*Гравитационная сила.* Величина гравитационной силы (силы тяжести) определяется выражением

$$F_g = m_d g, \quad (3.1)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения. Гравитационная сила пропорциональна объему частицы  $F_g \sim a^3$ .

*Сила торможения нейтральными частицами.* На движущуюся частицу действует сила сопротивления со стороны окружающей среды. В случае слабоионизованной плазмы основной вклад в силу сопротивления дает нейтральная компонента плазмы. Поскольку скорость пылевых частиц, как правило, значительно меньше тепловой скорости нейтральных частиц, сила сопротивления оказывается пропорциональной скорости частицы. При этом следует различать два режима, определяемых величиной числа Кнудсена  $K_n = \lambda/a$  – отношения длины свободного пробега атомов нейтрального газа к характерному размеру частиц. Режим с  $K_n \ll 1$  принято называть гидродинамическим. В этом пределе сила сопротивления выражается формулой Стокса, которая для сферической частицы радиуса  $a$  имеет вид

$$F_n = -6\pi\eta a u_d, \quad (3.2)$$

где  $\eta$  – вязкость нейтрального газа,  $u_d$  – скорость движения частицы относительно газа. Знак “–” означает, что сила действует в направлении, обратном направлению относительной скорости. В другом предельном случае  $K_n \gg 1$ , который часто называют режимом свободного пролета, сила сопротивления может быть записана в виде

$$F_n = -\frac{8\sqrt{2}\pi}{3} \xi a^2 N_n T_n \frac{u_d}{v_{Tn}}, \quad (3.3)$$

где  $N_n$  и  $T_n$  – концентрация и температура нейтрального газа,  $\xi$  – коэффициент порядка единицы, определяемый особенностями взаимодействия нейтральных частиц с поверхностью пылевой частицы. Так, например,  $\xi = 1$  для случая зеркального отражения нейтральных частиц от поверхности пылевой частицы при столкновении и  $\xi = 1 + \pi/8$  для случая полной аккомодации.

*Термофоретическая сила.* Если в нейтральном газе имеется градиент температуры, то на пылевую частицу будет действовать сила, направленная в обратном к градиенту направлении (т.е., в сторону уменьшения температуры). В случае полной аккомодации выражение для силы имеет вид

$$F_{th} = -\frac{4\sqrt{2}\pi}{15} \frac{a^2}{v_{Tn}} \zeta \nabla T_n, \quad (3.4)$$

где  $\zeta$  – теплопроводность газа. Выражение (3.4) получено для случая неограниченной системы. В случае, когда пылевая частица находится вблизи электрода (либо стенки разрядной камеры), приходится учитывать поправки, связанные с аккомодацией нейтральных частиц при столкновениях со стенкой.

*Электростатическая сила.* При наличии в плазме электрического поля напряженности  $E$  на заряженную проводящую частицу действует сила.

$$F_e = Z_d e E \left( 1 + \frac{(a/d)^2}{3(1+a/d)} \right), \quad (3.5)$$

где  $Z_d$  – зарядовое число,  $d$  – дебаевский радиус.

Можно ввести эффективную величину поля  $E_{eff} = E \left( 1 + \frac{(a/d)^2}{3(1+a/d)} \right)$ , так что  $F_e = Z_d e E_{eff}$ . Большая величина  $E_{eff}$  по сравнению с  $E$  связана с поляризацией плазмы в окрестности пылевой частицы, индуцированной внешним электрическим полем. Поляризация плазмы приводит также к появлению у пылевой частицы дипольного момента  $p = a^3 E_{eff}$ , направленного по направлению поля. Если внешнее поле неоднородно, то на такой диполь будет действовать сила

$$F_{dp} = (p \nabla) E. \quad (3.6)$$

Для пылевой плазмы характерны условия, при которых  $a \ll d$ , так что электрическая сила дается выражением  $F_e = Z_d e E$ , а дипольный момент  $p = a^3 E$ , т.е., тот же результат, что и для проводящей сферы в вакууме. Отметим, что в силу малости дипольного момента силой (3.6) практически всегда можно пренебречь по сравнению с (3.5).

*Сила ионного увлечения.* Если существует направленное движение электронов или ионов со скоростью  $v_s$  относительно пылевой частицы, возникает сила, действующая в направлении движения плазменных частиц  $F_{id}$ . Она обусловлена передачей импульса от плазменных частиц пылевой. В силу большей массы ионов эффект, связанный с ними, как правило, преобладает. Данная сила (ионного увлечения) может быть представлена в виде суммы двух слагаемых. Первое определяется передачей импульса при неупругих столкновениях (поглощении) ионов с частицей, а второе – передачей импульса в упругих столкновениях (кулоновском рассеянии ионов на частице):

$$F_{id} = m_i \iiint v f_i(v) [\sigma_i^{coll} + \sigma_i^{sl}] v d^3 v. \quad (3.7)$$

Здесь  $m_i$  – масса иона,  $f_i(v)$  – функция распределения ионов по скоростям,  $\sigma_i^{coll}$  – сечение поглощения ионов частицей

$$\sigma_i^{coll} = \pi a^2 \left( 1 - \frac{2e\varphi_{fl}}{m_i v^2} \right) \quad (3.8a)$$

( $\varphi_{fl}$  – потенциал поверхности пылевой частицы), а  $\sigma_i^s$  – сечение рассеяния при кулоновском взаимодействии между ионом и частицей

$$\sigma_i^s = 4\pi \int_{b_{coll}}^d \frac{bdb}{1 + (b/b_0)^2} = 2\pi b_0^2 \ln \Lambda, \quad (3.8b)$$

где  $b_0 = \frac{Z_d e^2}{m_i v^2}$ ,  $\Lambda = \frac{d^2 + b_0^2}{b_{coll}^2 + b_0^2}$ . В формуле (3.8b) нижний предел интегрирования

$b_{coll} = a \left( 1 - \frac{2Z_d e^2}{m_i v^2} \right)^{\frac{1}{2}}$  выбирается исходя из того, что ионы с меньшим прицельным

параметром поглощаются частицей. Наличие верхнего предела интегрирования связано с расходимостью интеграла на бесконечности и соответствует обрезанию кулоновского потенциала взаимодействия на длине экранирования  $d$ . В случае  $b_{\text{coll}} \geq d$  передача импульса обусловлена исключительно поглощением ионов, так что  $\sigma_i^s = 0$ .

Представляют интерес два предельных случая. Во-первых, вблизи отрицательного электрода, либо стенок разрядной камеры, (согласно правилу Бома) скорость ионов должна превышать ионно-звуковую скорость  $v_s \geq \sqrt{T_e/m_i} \gg v_{Ti}$ . Последнее неравенство позволяет использовать модель холодных ионов при вычислении величины силы, действующей на пылевую частицу. Интегрирование (3.7) дает при этом

$$F_{id} = \pi a^2 m_i N_i v_s^2 [\chi_1 + \chi_2], \quad (3.9)$$

где  $N_i$  – концентрация ионов,

$$\chi_1 = 1 - \frac{2Z_d e^2}{m_i v_s^2 a}, \quad \chi_2 = 2 \left( \frac{Z_d e^2}{m_i v_s^2 a} \right)^2 \ln \left[ \frac{(d/a^2) + \left( \frac{Z_d e^2}{m_i v_s^2 a} \right)^2}{\left( 1 - \frac{Z_d e^2}{m_i v_s^2 a} \right)^2} \right]. \quad (3.10)$$

Под дебаевским радиусом здесь следует понимать электронный дебаевский радиус, поскольку холодные ионы не участвуют в экранировке. При  $v_s \rightarrow \infty$ , либо  $Z_d \rightarrow 0$ , выражение (3.9) дает  $F_i \approx \pi a^2 m_i N_i v_s^2$ , т.е. сила ионного увлечения пропорциональна квадрату скорости ионов.

С другой стороны, в объеме квазинейтральной плазмы часто реализуется ситуация, когда  $v_s \ll v_{Ti}$  (этот предельный случай позволяет определить силу сопротивления плазмы при движении самой пылевой частицы). Функцию распределения ионов по скоростям можно представить в этом случае в виде

$$f_i(v) = f_{io}(v) \left[ 1 + v_s v / v_{Ti}^2 \right], \quad (3.11)$$

где  $f_{io}(v)$  – максвелловская функция. Интегрирование (3.7) дает в данном случае

$$F_{id} = \frac{8\sqrt{2\pi}}{3} a^2 N_i T_i \frac{v_s}{v_{Ti}} [\chi_1 + \chi_2], \quad (3.12)$$

где

$$\chi_1 = 1 + z\tau/2 \quad \left( z = \frac{Z_d e^2}{a T_e}, \quad \tau = \frac{T_e}{T_i} \right),$$

$$\chi_2 = (z\tau)^2 \int_{x_*}^{\infty} x \exp(-x^2) \ln \left[ \frac{\left( (d/a)^2 + z^2 \tau^2 / 4x^4 \right)^2}{1 + z\tau / 2x^2} \right] dx, \quad (3.13)$$

$$x_* = \left[ \frac{z\tau}{(d/a)^2 - 1} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь дебаевский радиус определяется как  $d^{-2} = d_e^{-2} + d_i^{-2}$ . Заметим, что в частном случае  $z = 0$  формула (3.12) переходит в формулу (3.3), дающую линейную

зависимость силы ионного увлечения от скорости ионов. Отметим также, что  $\chi_2 = 0$  в формулах (3.10) и (3.13), если  $b_{coll} \geq d$ . Самосогласованное решение задачи о силе увлечения потоком ионов в общем случае требует расчета потенциала, создаваемого частицей в потоке ионов.

*Взаимодействие между пылевыми частицами.* Взаимодействие между заряженными пылевыми частицами значительно отличается от кулоновского в вакууме. Если известно распределение электростатического потенциала  $\varphi(r)$  вокруг пробной частицы, находящейся в плазме, то абсолютную величину силы, действующей на некоторую частицу заряда  $Z_d e$ , находящуюся в точке  $r$ , можно представить в виде  $F = -\frac{dU}{dr}$ , где  $U = Z_d e \varphi(r)$ . Основным вопросом является распределение потенциала в плазме. Для уединенной сферической частицы часто используется так называемый экранированный кулоновский потенциал (или потенциал типа Юкавы)

$$\varphi(r) = \frac{Z_d e}{r} \exp\left(-\frac{r}{d}\right). \quad (3.14)$$

Отметим, что в настоящее время исследуются различные механизмы взаимодействия между пылевыми частицами, приводящие как к силам отталкивания, так и силам притяжения между одноименно заряженными пылевыми частицами. Обсуждение этих вопросов выходит за рамки настоящего пособия.

## Литература

## К части I

1. Ч.Киттель, У.Найт, М.Рудерман. Берклевский курс физики, Т.1. Механика. М., Наука, 1971. 447 С.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики, Т.1. Механика. М., Наука, 1989. 519 С.

## К части II

3. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М., Высшая школа, 1986. 320 С.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. М., Наука, 1983. 687 С.
5. Голант В. Е., Жилинский А. П., Сахаров С. А. Основы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1977. 398 С.
6. Чен Ф. Введение в физику плазмы, М.: Мир, 1987. 400 С.

## К части III

7. Материалы семинаров-школ молодых ученых, студентов и аспирантов. Под ред. Хахаева А.Д., Петрозаводск, 2004. Т.1. 290С.
8. Материалы лекций школ по физике низкотемпературной плазмы. Под ред. Хахаева А.Д., Петрозаводск, 2001. 360С.
9. Dusty plasmas. Edited by Andre Boushoule. Orlean, 1999. 408 P.
10. P.K.Shukla, A.A.Mamun, Introduction to Dusty Plasma Physics, IoP Publishing, London, 2002, 271 P.
11. Цытович В.Н. Плазменно-пылевые кристаллы, капли и облака.// УФН.1997. Т.167. С. 57 – 99.