

## Стандартные задачи

1. Лодка движется относительно воды со скоростью в два раза меньшей скорости течения реки. Под каким углом к направлению течения лодка должна держать курс, чтобы ее сносило течением как можно меньше?
2. Два тела бросили одновременно из одной точки: одно — вертикально вверх, другое — под углом  $60^\circ$  к горизонту. Начальная скорость каждого тела  $25$  м/с. Найти расстояние между телами через  $1.7$  с.
3. Тело бросили с поверхности земли под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0$ . Найти:
  - время движения;
  - уравнение траектории  $y(x)$ , где  $x$  и  $y$  — перемещения по горизонтали и вертикали соответственно;
  - максимальную высоту подъема и горизонтальную дальность полета;
  - при каком  $\alpha$  они равны друг другу?
- 4\*. Шарик падает с нулевой начальной скоростью на гладкую наклонную плоскость, составляющую угол  $\alpha$  с горизонтом. Пролетев расстояние  $h$ , он упруго отразился от плоскости. На каком расстоянии от места падения шарик отразится второй раз?
5. Магнитная лента в катушечном магнитофоне протягивается с постоянной скоростью  $v$ . Толщина ленты равна  $h$ . В начальный момент времени радиус внешнего слоя магнитной ленты равен  $r$ . Найти угловую скорость катушки как функцию времени  $t$ .
- 6\*. Точка  $A$  находится на ободу колеса радиуса  $R = 0.5$  м, которое катится без скольжения по горизонтальной поверхности со скоростью  $v = 1$  м/с. Найти:
  - величину и направление ускорения точки  $A$  в произвольный момент времени;
  - полный путь, проходимый точкой  $A$  между двумя последовательными моментами ее касания поверхности;
  - уравнение траектории точки  $A$  (циклоида), если в начальный момент точка  $A$  находилась в самом нижнем положении. Начало координат поместить в начальное положение точки  $A$ .

7. Шайбу поместили на наклонную плоскость, составляющую угол  $10^\circ$  с горизонтом. Если шайбе сообщить некоторую начальную скорость вверх по плоскости, то она до остановки проходит путь  $S_1$ ; если же сообщить ту же начальную скорость вниз, то путь до остановки равен  $S_2$ . Найти коэффициент трения, если  $S_2/S_1 = 4$ .
- 8\*. Шайбу положили на наклонную плоскость и сообщили направленную вверх начальную скорость  $v_0$ . Коэффициент трения между шайбой и плоскостью равен  $k$ . При каком значении угла наклона  $\alpha$  шайба пройдет вверх по плоскости наименьшее расстояние? Чему оно равно?
9. Брусок массы  $m$  тянут за нить так, что он движется с постоянной скоростью по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения  $k$ , причем нить составляет угол  $\alpha$  с плоскостью (рис. 1). Найти угол  $\alpha$ , при котором натяжение нити минимально. Чему оно равно?

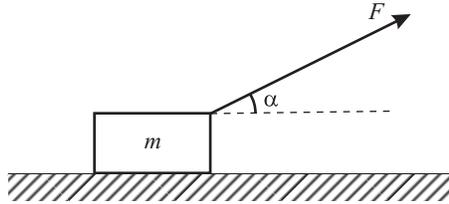


Рис. 1.

10. Через блок, прикрепленный к потолку кабины лифта, перекинута нить, к концам которой привязаны грузы с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Кабина начинает подниматься вверх с ускорением  $a$ . Пренебрегая массой блока, найти:
- ускорение груза  $m_1$  относительно кабины;
  - силу, с которой блок действует на потолок кабины.
- 11\*. Пуля, пробив доску толщины  $h$ , изменила свою скорость от  $v_0$  до  $v$ . Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.
- 12\*. На горизонтальной поверхности находится призма 1 массы  $m_1$  с углом  $\alpha$  и на ней брусок 2 массы  $m_2$  (рис. 2). Пренебрегая трением, найти ускорение призмы.

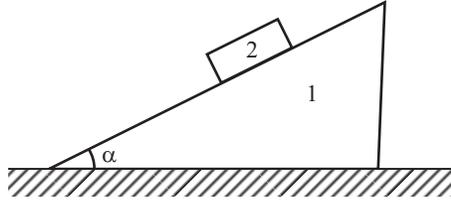


Рис. 2.

13. Небольшое тело начинает скользить с вершины гладкой сферы радиуса  $R$ . Найти угол между вертикалью и радиус-вектором, характеризующим положение тела относительно центра сферы в момент отрыва от нее, а также скорость тела в этот момент.
14. На экваторе с высоты 500 м на поверхность Земли падает тело (без начальной скорости относительно Земли). На какое расстояние и в какую сторону отклонится от вертикали тело при падении?
- 15\*. Небольшой шарик массы  $m$ , подвешенный на нити, отвели в сторону так, что нить образовала прямой угол с вертикалью, а затем отпустили. Найти:
  - величину ускорения шарика и силу натяжения нити как функции угла отклонения нити от вертикали;
  - силу натяжения нити в момент, когда вертикальная составляющая скорости шарика максимальна;
  - угол отклонения нити в момент, когда полное ускорение шарика горизонтально.
16. Плот массы  $M$  с человеком массы  $m$  покоится на поверхности пруда. Относительно плота человек совершает перемещение  $l_0$  и останавливается. Пренебрегая сопротивлением воды, найти перемещение  $l$  плота относительно берега.
17. Ракета движется в отсутствие внешних сил, выпуская непрерывную струю газа со скоростью  $u$ , постоянной относительно ракеты. Найти скорость ракеты  $v$  в момент, когда ее масса равна  $m$ , если в начальный момент она имела массу  $m_0$  и ее скорость была равна нулю.
18. Ракета начала подниматься вертикально вверх в однородном поле тяжести. Начальная масса ракеты (с топливом) равна  $m_0$ . Скорость

газовой струи относительно ракеты равна  $u$ . Найти скорость ракеты в зависимости от ее массы  $m$  и времени подъема  $t$ .

- 19\*. Космический корабль массы  $m_0$  движется в отсутствие внешних сил со скоростью  $v_0$ . Для изменения направления движения включили реактивный двигатель, который стал выбрасывать струю газа с постоянной относительно корабля скоростью  $u$ , все время перпендикулярной направлению движения корабля. В конце работы двигателя масса корабля стала равной  $m$ . На какой угол  $\alpha$  изменилось направление движения корабля за время работы двигателя?
20. Небольшое тело  $A$  начинает скользить без трения с высоты  $h$  по наклонному желобу, переходящему в полуокружность радиуса  $h/2$  (рис. 3). Найти скорость тела в наивысшей точке его траектории (после отрыва от желоба).

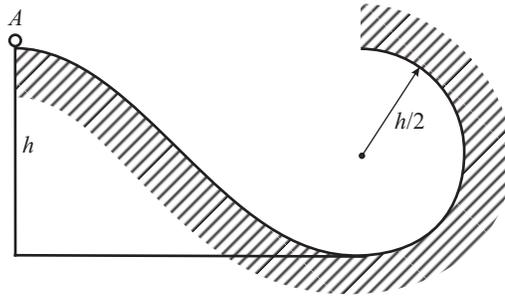


Рис. 3.

- 21\*. Небольшой шарик массы  $m = 50$  г подвешен на упругой нити, жесткость которой  $\kappa = 63$  Н/м. Нить с шариком отвели в горизонтальное положение, не деформируя нити, и осторожно отпустили. Когда нить проходила вертикальное положение, ее длина оказалась  $l = 1.5$  м и скорость шарика  $v = 3$  м/с. Найти силу натяжения нити в этом положении.
22. На гладкой горизонтальной плоскости лежат два одинаковых бруска, соединенные недеформированной пружинкой жесткости  $\kappa$  и длины  $l_0$ . На один из брусков начали действовать постоянной горизонтальной силой  $F$  (рис. 4). Найти максимальное и минимальное расстояния между брусками в процессе движения.

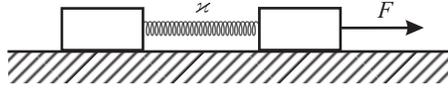


Рис. 4.

23. Частица массы  $m_1$  испытала упругое столкновение с покоившейся частицей массы  $m_2$ . Какую относительную часть кинетической энергии потеряла налетающая частица, если:
- она отскочила под прямым углом к своему первоначальному направлению движения;
  - столкновение лобовое?
24. Частица массы  $m$  испытала столкновение с покоившейся частицей массы  $M$ , в результате которого частица  $m$  отклонилась на угол  $90^\circ$ , а частица  $M$  отскочила под углом  $30^\circ$  к первоначальному направлению движения частицы  $m$ . На сколько процентов и как изменилась кинетическая энергия этой системы после столкновения, если  $M/m = 5$ ?
25. Частица массы  $m_1$  испытала упругое столкновение с покоившейся частицей массы  $m_2$ , причем  $m_1 > m_2$ . Найти максимальный угол, на который может отклониться налетающая частица в результате соударения.
- 26\*. Частица движется по замкнутой траектории в центральном силовом поле, потенциальная энергия которого пропорциональна квадрату расстояния до центра поля. Наименьшее расстояние от тела до центра поля равно  $r_0$ , а наибольшее — в  $\eta$  раз больше. Найти радиус кривизны траектории тела в точке, соответствующей  $r_0$ .
27. Двойная звезда — это система из двух звезд, движущихся вокруг общего центра масс. Известны расстояние  $l$  между компонентами двойной звезды и период  $T$  ее вращения. Считая  $l$  постоянным, найти массу системы.
28. Имеется однородный шар массы  $M$  и радиуса  $R$ . Найти напряженность и потенциал гравитационного поля этого шара как функции расстояния  $r$  от его центра (при  $r < R$  и  $r > R$ ).

29. Однородный шар имеет массу  $M$  и радиус  $R$ . Найти давление  $p$  внутри шара, обусловленное гравитационным сжатием, как функцию расстояния  $r$  от его центра. Оценить давление в центре Земли, считая Землю однородным шаром.
- 30\*. Внутри однородного шара плотности  $\rho$  имеется сферическая полость, центр которой находится на расстоянии  $l$  от центра шара. Найти напряженность гравитационного поля внутри полости.
31. Однородный диск радиуса  $R$  имеет круглый вырез (рис. 5). Масса оставшейся (заштрихованной) части диска равна  $m$ . Найти момент инерции такого диска с вырезом относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей:
- через точку  $O$ ;
  - через его центр масс.

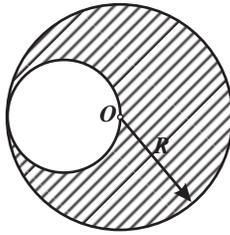


Рис. 5.

32. Однородный шар массы  $m = 5$  кг скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом. Найти кинетическую энергию шара через  $t = 1.6$  с после начала движения.
33. Однородный шар радиуса  $r$  скатывается без скольжения с вершины сферы радиуса  $R$  без начальной скорости. Найти угловую скорость шара после отрыва от сферы.
34. Однородный стержень длины  $l = 110$  см расположен под углом  $\alpha = 60^\circ$  к гладкой горизонтальной поверхности, на которую он опирается своим нижним концом. Стержень без толчка отпустили. Найти скорость верхнего конца стержня непосредственно перед падением его на поверхность.

- 35\*. Сплошному однородному цилиндру массы  $m$  и радиуса  $R$  сообщили вращение вокруг его оси с угловой скоростью  $\omega$ , затем его положили боковой поверхностью на горизонтальную плоскость и отпустили. Коэффициент трения равен  $k$ . Найти время, в течение которого движение цилиндра будет происходить со скольжением.
- 36\*. Корабль движется со скоростью  $v = 36$  км/ч по дуге окружности радиуса  $R = 200$  м. Найти момент гироскопических сил, действующих на подшипники со стороны вала с маховиком, которые имеют момент инерции относительно оси вращения  $I = 3.8 \cdot 10^3$  кг  $\cdot$  м<sup>2</sup> и делают  $n = 300$  об/мин. Ось вращения расположена вдоль корабля.
37. Найти уравнение траектории  $y(x)$  точки, если она движется по закону:

- $x = a \sin \omega t, x = a \sin 2\omega t;$
- $x = a \sin \omega t, x = a \cos 2\omega t.$

Изобразить графики этих траекторий.

38. Частица массы  $m$  находится в одномерном силовом поле, потенциальная энергия которого имеет вид  $U(x) = a/x^2 - b/x$ , где  $a$  и  $b$  — положительные постоянные. Найти период малых колебаний частицы около положения равновесия.
39. Два математических маятника, каждый длины  $l = 50$  см и массы  $m = 45$  г, соединены пружиной жесткостью  $\kappa = 0.66$  Н/м (рис. 6). При равновесии маятники занимают вертикальное положение. Найти период малых колебаний этих маятников, если их колебания происходят в плоскости рисунка в противоположные стороны (в противофазе).
- 40\*. Найти период малых поперечных колебаний шарика массы  $m = 40$  г, укрепленного на середине натянутой струны длины  $l = 1$  м. Силу натяжения струны считать постоянной и равной  $F = 10$  Н. Массой струны и силой тяжести пренебречь.
41. Математический маятник совершает колебания в среде, для которой логарифмический декремент затухания  $\lambda_0 = 1.5$ . Каким будет значение  $\lambda$ , если сопротивление среды увеличить в  $n = 2$  раза? Во сколько раз следует увеличить сопротивление среды, чтобы колебания стали невозможны?

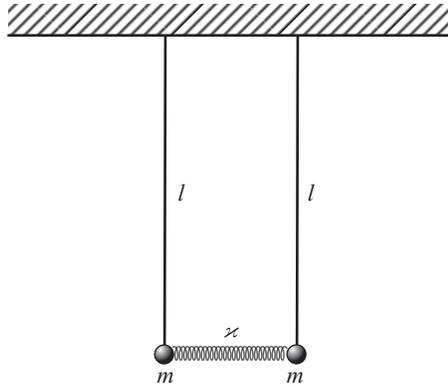


Рис. 6.

42. Однородный диск радиуса  $R = 13$  см может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через край диска. Найти период малых колебаний этого диска, если логарифмический декремент затухания  $\lambda = 1$ .
43. Найти добротность осциллятора, у которого отношение резонансной частоты к частоте затухающих колебаний равно 0.97.
44. Найти разность фаз  $\varphi$  между смещением и вынуждающей силой при резонансе, если собственная частота  $\omega_0 = 50 \text{ с}^{-1}$  и коэффициент затухания  $\beta = 5.2 \text{ с}^{-1}$ .
45. Тело массы  $m$ , подвешенное на пружинке, совершает вынужденные колебания с амплитудой  $a$  и частотой  $\omega$ . Собственная частота равна  $\omega_0$ . Найти среднюю за период механическую энергию колебаний данного осциллятора.
- 46\*. Шарик массы  $m = 50$  г подвешен на пружинке жесткости  $\kappa = 20$  Н/м. Под действием вынуждающей вертикальной гармонической силы с частотой  $\omega = 25 \text{ с}^{-1}$  шарик совершает установившиеся колебания. При этом смещение шарика отстает по фазе от вынуждающей силы на  $\varphi = 3\pi/4$ . Найти добротность осциллятора.
- 47\*. Шарик массы  $m$ , подвешенный на невесомой пружинке, может совершать вертикальные колебания с коэффициентом затухания  $\beta$ . Собственная частота колебаний равна  $\omega_0$ . Под действием внешней вертикальной силы, меняющейся по закону  $F = F_0 \cos \omega t$ , шарик совершает установившиеся гармонические колебания. Найти:

- среднюю за период колебания мощность  $\langle P \rangle$  силы  $F$ ;
  - частоту  $\omega$  вынуждающей силы, при которой  $\langle P \rangle$  максимальна; чему равна  $\langle P \rangle_{max}$ ?
48. Имеется прямоугольный треугольник, у которого катет  $a = 5$  м и угол между этим катетом и гипотенузой  $\alpha = 30^\circ$ . Найти в системе отсчета, движущейся относительно этого треугольника со скоростью  $v = 0.866c$  вдоль катета  $a$ :
- соответствующее значение угла  $\alpha'$ ;
  - длину гипотенузы  $l'$  и ее отношение к собственной длине.
49. Собственное время жизни некоторой нестабильной частицы равно 10 нс. Какой путь пролетит эта частица до распада в лабораторной системе отсчета, где ее время жизни 20 нс?
50. Две частицы движутся навстречу друг другу со скоростями  $v_1 = 0.5c$  и  $v_2 = 0.75c$  по отношению к лабораторной системе отсчета. Найти:
- скорость, с которой уменьшается расстояние между частицами в лабораторной системе отсчета;
  - их относительную скорость.
51. Две релятивистские частицы движутся под прямым углом друг к другу в лабораторной системе отсчета, причем одна со скоростью  $v_1$ , а другая со скоростью  $v_2$ . Найти их относительную скорость.
- 52\*. Частица движется в  $K$ -системе со скоростью  $v$  под углом  $\vartheta$  к оси  $x$ . Найти соответствующий угол в  $K'$ -системе, перемещающейся со скоростью  $V$  относительно  $K$ -системы в положительном направлении ее оси  $x$ , если оси  $x$  и  $x'$  обеих систем совпадают.
53. Частица массы  $m$  в начальный момент времени начинает двигаться под действием постоянной силы  $F$ . Найти скорость частицы и пройденный ею путь в зависимости от времени  $t$ .
54. Энергия фотона в  $K$ -системе отсчета равна  $\varepsilon$ . Найти энергию  $\varepsilon'$  этого фотона в  $K'$ -системе, перемещающейся со скоростью  $V$  относительно  $K$ -системы в направлении движения фотона. При каком значении  $V$  энергия  $\varepsilon' = \varepsilon/2$ ?

55. Релятивистская частица массы  $m$ , движущаяся со скоростью  $v_0 = 4c/5$ , испытывает неупругое столкновение с покоящейся частицей такой же массы.
- Чему равна скорость  $v$  образовавшейся составной частицы?
  - Чему равна масса составной частицы?
56. Релятивистская частица массы  $m$  с кинетической энергией  $K$  налетает на покоящуюся частицу той же массы. Найти массу и скорость составной частицы, образовавшейся в результате соударения.
- 57\*. Релятивистская ракета выбрасывает струю газа с нерелятивистской скоростью  $u$ , постоянной относительно ракеты. Найти зависимость скорости  $v$  ракеты от ее массы  $m$ , если в начальный момент времени масса ракеты равна  $m_0$ .
58. Покоящейся  $\pi$ -мезон ( $m_\pi = 273 m_e$ ) распадается на  $\mu$ -мезон ( $m_\mu = 207 m_e$ ) и нейтрино ( $m_\nu = 0$ ). Выразите в  $Mэв$  (в системе единиц, в которой  $c = 1$ ) кинетическую энергию и импульс  $\mu$ -мезона и нейтрино.
59. Масса протона составляет  $m_p = 938 Mэв$  (в системе единиц, в которой  $c = 1$ ) и он имеет энергию  $10^{10} Гэв$ . Этот протон проходит расстояние  $10^5$  световых лет. Сколько времени потребуются протону на это путешествие «с его точки зрения»?
- 60\*. Ускоритель «беватрон» в Беркли проектировался таким образом, чтобы он мог разгонять протоны до энергии, достаточной для образования пар протон–антипротон в реакции  $p + p \rightarrow p + p + (p + \bar{p})$ . Так называемая пороговая энергия этой реакции соответствует случаю, когда четыре частицы, перечисленные в правой части формулы реакции, движутся вместе как одна составная частица массы  $M = 4m_p$ . Если протоны мишени до соударения покоятся, чему равна пороговая кинетическая энергия бомбардирующих протонов?